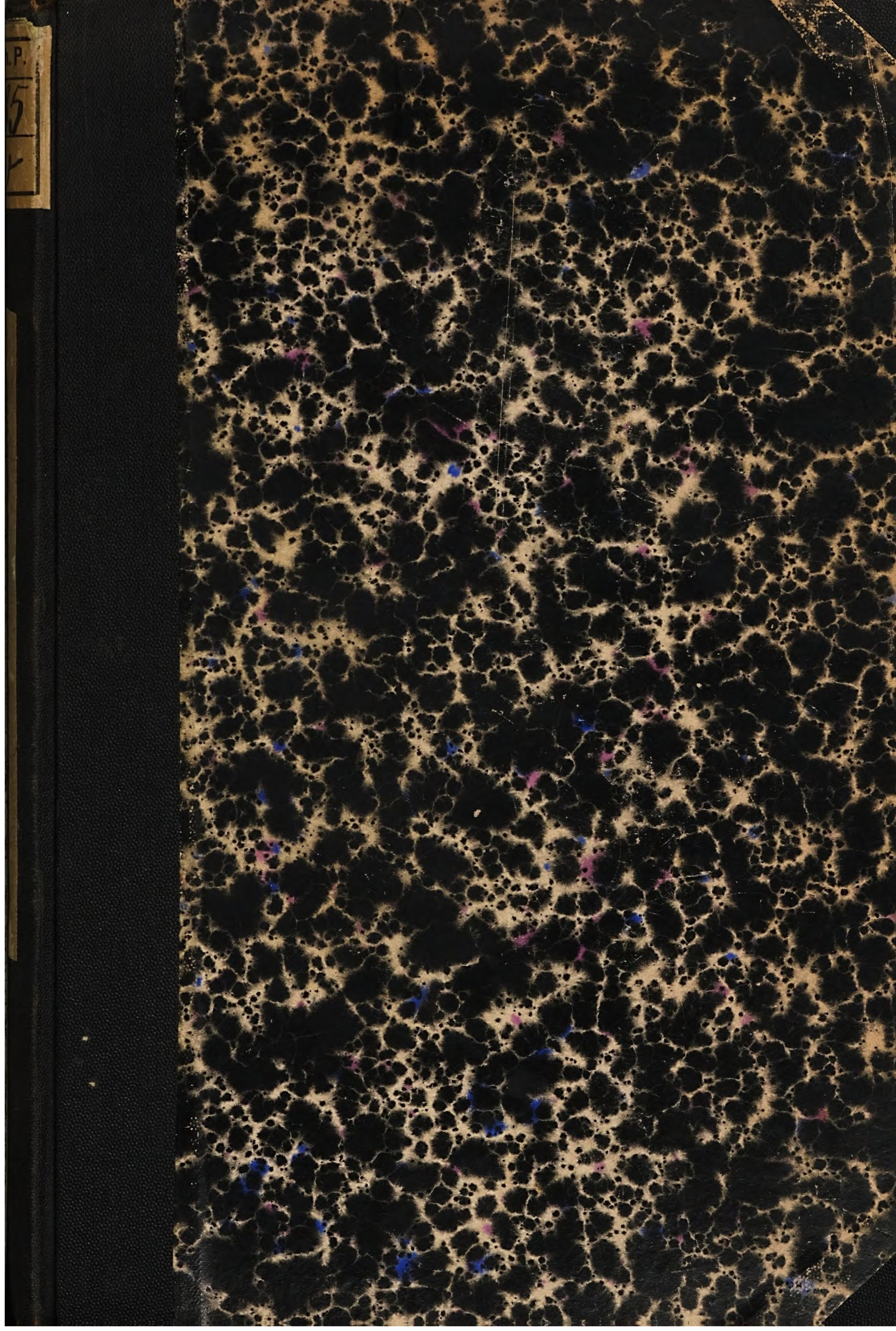










DIE  
**AUSDEHNUNGSLEHRE**

ODER  
**DIE WISSENSCHAFT VON DEN EXTENSIVEN  
GRÖßEN  
IN STRENGER FORMEL-ENTWICKLUNG.**

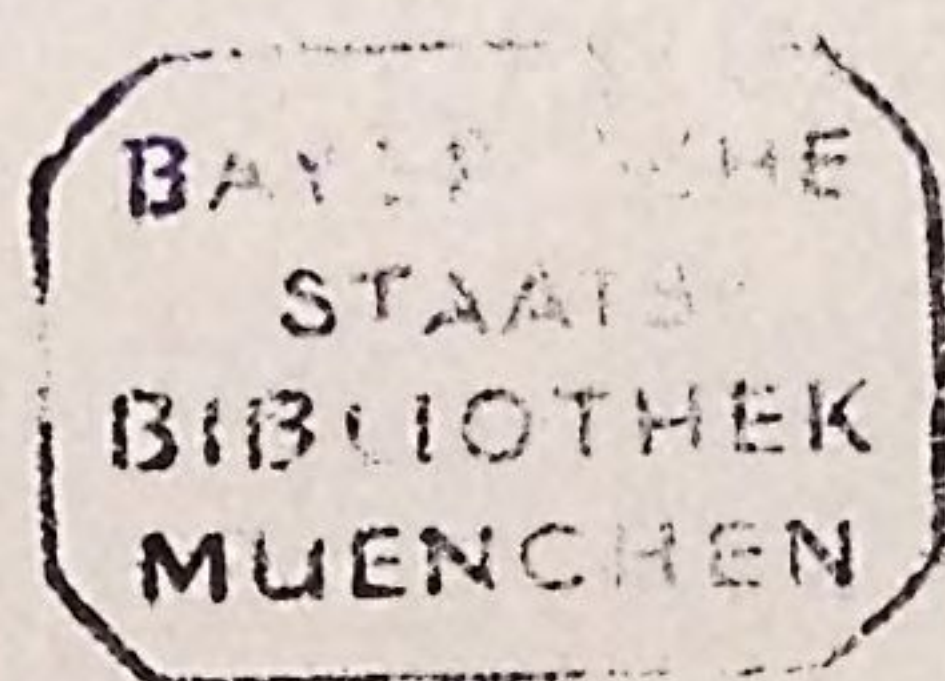
VON  
**ROBERT GRASSMANN.**

---

STETTIN 1891.

DRUCK UND VERLAG VON R. GRASSMANN.







Die

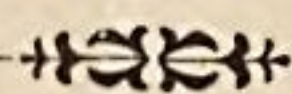
# Ausdehnungslehre

oder

die Wissenschaft von den extensiven Größen  
in strenger Formelentwicklung.

Von

Robert Grassmann.



**Stettin 1891.**

Druck und Verlag von R. Grassmann.







Die  
Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft  
von den extensiven Größen

der  
niedere Zweig der Synthese.

---

Dritter Zweig  
der  
Formenlehre oder Mathematik.





Die

Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft

von der extensiven Größe

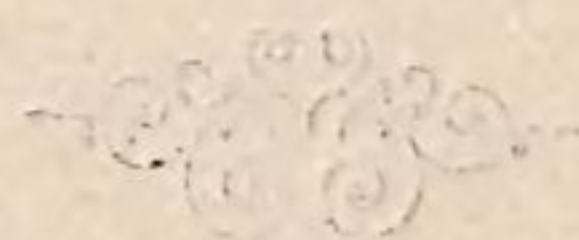
von

Nicholas Ziegler der Symbolik

Zweiter Theil

in

Leipzig bey C. C. Neumann, Neuberger und Lebesque





## V o r w o r t.

---

Die Geschichte der Ausdehnungslehre oder der Wissenschaft von den extensiven Größen ist eine sehr kurze.

Die Idee derselben ist zuerst um 1700 n. Chr. von Leibniz angeregt. Er nennt dieselbe eine geometrische Charakteristik und rühmt von ihr, dass sie für jede Aufgabe der Raumlehre zugleich Lösung, Zeichnung und Beweis auf einfache Weise gebe, dass sie ebenso die Bewegungslehre oder Mechanik neu begründe und für die Erforschung des innern Baues der Körper Grotes leisten müsse, ja dass sie auch auf andere Dinge der Aussenwelt die reichsten Anwendungen zulasse.

Nach Leibniz hat diese Idee lange geruht.

Zwar hat mein Vater, der Professor Justus Grassmann „Raumlehre Teil II“ Berlin 1824 Seite 194 und ferner „Trigonometrie“ Berlin 1835 Seite 10 das Rechteck bezüglich das Parallelogramm als das wahre geometrische Produkt und die Konstruktion desselben als die eigentliche geometrische Multiplikation aufgefasst. Zwar hat „Möbius barycentrischer Kalkül“ Leipzig 1827 die Addition der Punkte und Bellavitis in „Annali delle scienze de regno Lombardo-Veneto“ 1835 und 1837 die geometrische Addition der Strecken, sowie unabhängig von ihm auch „Möbius Mechanik des Himmels, Leipzig 1843“ gleichfalls die geometrische Addition der Strecken gelehrt. Aber alle diese Versuche blieben doch nur vereinzelt und kamen nicht zu einer allgemeinen Auffassung der Sache, sondern blieben nur in einzelnen geometrischen Betrachtungen befangen.

Der erste, der die Idee der Ausdehnungslehre als eines neuen Zweiges der reinen Mathematik aufgefasst und ausgebildet hat, ist mein Bruder



Hermann Grassmann gewesen. Derselbe machte im Winter 1839 bis 1840 eine grose Arbeit über die Ebbe und Flut, studirte dazu Lagrange *mécanique analytique* und Laplace *mécanique céleste*, versuchte bei diesen Arbeiten die Sache durch Addition bez. Multiplikation der Bewegungen zu vereinfachen, und kam so zunächst zu einer Reihe von Gesetzen über Addition und Multiplikation von Strecken bez. Bewegungen. Er verfolgte die Sache in den folgenden Jahren weiter und gab „Die lineale Ausdehnungslehre“ Leipzig 1844 heraus. In diesem Werke geht er noch vorwiegend von geometrischen Grösen, bez. statischen Momenten aus und sucht daraus die Gesetze der neuen Wissenschaft zu gewinnen. Auch die Preisschrift „Geometrische Analyse“, geknüpft an die von Leibniz erfundene Charakteristik“ Leipzig 1847 steht noch ganz auf diesem Standpunkte. Am 15. September 1845 lehrte nun auch Saint-Venant in Paris, ohne das Werk des Bruders zu kennen, die geometrische Multiplikation der Strecken in „Comptes rendus“ Paris 1845, Tom. 21, S. 620 ff. Der Bruder sandte daher zwei Exemplare seines Werkes an Cauchy in Paris, eins für Cauchy, eins für Saint-Venant; der Empfang der Bücher ist bestätigt. Cauchy hat dadurch angeregt, ähnliche Betrachtungen angestellt und demnächst „Comptes rendus“ Paris 1853 eine Methode veröffentlicht, um vermittels gewisser symbolischer Grösen, welche er *clefs algébriques* nennt, algebraische Gleichungen und verwandte Probleme zu lösen; eine Methode, welche genau mit der in H. Grassmann Ausdehnungslehre von 1844 (§ 45, 46 und 93) dargestellten übereinstimmt. Er ist dabei offenbar in dem Glauben gewesen, dass diese Methode von ihm herühre, indem er vergessen hatte, woher er die Anregung zu dieser Methode erhalten hatte. Der Bruder glaubte es der Sache schuldig zu sein, dass er eine Prioritäts-Reklamation an die Pariser Akademie sende; dieselbe ist, wie die „Comptes rendus Tom. 38, S. 741“ berichten, im April 1854 einer Kommission zur Prüfung und Berichterstattung übergeben; allein weder Cauchy, noch diese Kommission haben ein Wort darüber verlauten lassen. Es ist die Priorität des Bruders also unzweifelhaft.

Im Jahre 1847 verbanden sich nun die Brüder Hermann und Robert Grassmann, um die Ausdehnungslehre, unabhängig von der Geometrie, als eignen Zweig der reinen Mathematik in strenger Form durch Formentwicklung abzuleiten und bis zu den Grenzen ihres Geltungsgebiets zu entwickeln. Das damals ausgearbeitete Heft von 132 Seiten ist noch heute im Besitze des Verfassers. In dieser gemein-



famen Arbeit behandelten sie zunächst die Gebietslehre bis zu den Gebieten nter Stufe und der Unabhängigkeit derselben von den ursprünglichen Einheiten und gewannen hier bereits den Satz, dass die Summe der Stufenzahlen zweier Gebiete gleich der Stufenzahl des beide umfassenden oder des verbindenden Gebietes plus der Stufenzahl des beiden gemeinschaftlichen Gebietes sei.

Sie leiteten demnächst die verschiedenen Arten der Multiplikation ab und kamen bereits damals zu den drei Arten derselben: der Flachung, welche sie äusere Multiplikation nannten, der Schattung oder der innern Multiplikation und der additiven (algebraischen) Multiplikation.

Bei der Flachung oder äusern Multiplikation leiteten sie zunächst die Gesetze der Flachung, namentlich die Gesetze über den Zeichenwechsel bei Vertauschung der Fache oder Faktoren, sowie die Gesetze der linealen Aenderung ab, behandelten dann das Produkt zweier Größen höherer Stufen oder die Fläche der Fläche und die Summen dieser Fläche und entwickelten die Gesetze der bezüglichen Flachung, wie die der Ergänzungen zum Hauptgebiete und die der Zurückleitung auf ein Gebiet.

Bei der innern Multiplikation (der Schattung) leiteten sie die Beziehung der innern Multiplikation zu der Multiplikation der Ergänzungen ab, ebenso die Sätze, wann das innere Produkt Null wird, sowie den Satz über die Gleichheit der innern Quadrate, oder mit andern Worten den Satz für die Einführung der Winkel.

Bei der additiven Multiplikation (der Flechtung) endlich entwickelten sie die Gesetze derselben, führten demnächst den Quotienten ein, leiteten die Gesetze für die Division ab, wie für die Affinität und die Multiplikation der Quotienten, und gelangten zu den Potenzen der Quotienten wie zu den Produkten mit einer und mehreren Lücken und zu dem polynomischen Lehrsätze für diese Art der Produkte. Fassen wir demnach Alles zusammen, so waren in diesem Jahre bereits alle Zweige der Ausdehnungslehre in strenger Form entwickelt, wenn gleich die Form noch vielfach zu wünschen übrig lies und die Details dieser Zweige teilweise noch nicht entwickelt waren. Welchen Anteil jeder der beiden Brüder an den Resultaten dieser gemeinsamen Arbeit hatte, lässt sich nicht mehr genau feststellen, indem bald dieser bald jener entscheidend eingriff und Schwierigkeiten überwand. Jeder von beiden Brüdern fühlte, dass er allein erlahmen würde, wenn er die Ideen mit eiserner Konsequenz bis in die letzten möglichen Operationen verfolgen wollte, und dass sie nur mit vereinten Kräften die Sache



zwingen könnten. Es haben eben beide zusammengewirkt und jeder seinen Teil beigetragen. Es will aber der Verfasser, Robert Grassmann, indem er dies Verhältniss darlegt, keineswegs für sich einen Anteil an der Erfindung der Ausdehnungslehre vindiciren: diese Erfindung ist und bleibt das alleinige geistige Eigentum von Hermann Grassmann. Dem Robert Grassmann kommt nur das Verdienst zu, auf die Allgemeinheit der Auffassung und auf die Strenge der Form hingewirkt und dadurch an der Lösung der Schwierigkeiten mitgewirkt zu haben.

Wie viel Wert beide Brüder auf diese Art des Zusammenarbeitens legten, das zeigt sich darin, dass sie, sobald es wieder möglich war, nochmals in den Jahren 1855 und 1856 diese Art des Zusammenwirkens versuchten. Aber sie waren inzwischen zu verschiedene Wege gegangen, die bisherige Form des Zusammenarbeitens wollte nicht mehr gelingen. Sie führten daher die neue Form ein, dass der eine Bruder die eine Woche die Ausarbeitung selbständig vornahm, diese Arbeit vortrug, der andere Bruder dann die Kritik übte und seinerseits eine Woche die selbständige Arbeit machte und so umschichtig. Die Arbeit ward dadurch sehr wesentlich gefördert. Als diese Arbeit beendet war, erkannten die beiden Brüder, dass die Arbeit soweit vollendet sei, als sie durch gemeinsames Arbeiten gefördert werden könne. Sie theilten sich daher die weiteren Arbeiten, wobei nur bemerkt werden möge, dass sie auch die Zahlenlehre, die Logik und die Kombinationslehre in ganz gleicher Weise gemeinsam bearbeitet hatten. Hermann übernahm die Herausgabe der beiden mathematischen Zweige: der Arithmetik und der Ausdehnungslehre, Robert übernahm die Herausgabe der beiden philosophischen Zweige: der Logik und der Kombinationslehre.

Hermann Grassmann hat zuerst seine Aufgabe gelöst. Er gab 1860 „Die Arithmetik“ und 1862 „Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form“ Berlin bei A. Enslin heraus. In diesem Werke sind alle Zweige der Ausdehnungslehre und auch die Anfänge der Funktionenlehre der ausgedehnten Grösen oder der Erweiterungslehre dargestellt.

Viel später als der Bruder Hermann ist Robert Grassmann dazu gekommen, seine Aufgabe zu lösen. Erst im Jahre 1872 gab derselbe die Logik und die Kombinationslehre und ausserdem die Formenlehre oder Mathematik, eine gedrängte kurze Uebersicht der fünf Zweige: der Grösenlehre, der Logik, der Kombinationslehre, der Zahlenlehre und der Ausdehnungslehre heraus, in welcher letztern er die mannig-



fachen Beziehungen darstellt, welche diese Zweige unter einander bieten.

Die Ausdehnungslehre hat durch die Ausgabe des Werkes H. Grassmann „Die Ausdehnungslehre vollständig und in strenger Form“ Berlin 1862 ihre Ausbildung als eigener Zweig der Mathematik erfahren. Leider ist der Bruder Hermann Grassmann bereits 1877 gestorben, das Werk gegenwärtig vergriffen. Eine neue Ausgabe desselben durch den Sohn des Verstorbenen ist in Vorbereitung begriffen; sonst hat es Niemand unternommen, diesen wichtigen Zweig der Mathematik auszuarbeiten und neu darzustellen.

In der Mathematik durfte dieser wichtige Hauptzweig der Mathematik mit seinem höhern Zweige, der Erweiterungslehre, jedenfalls nicht fehlen. Ueberdies war der Verfasser durch die gemeinsamen Arbeiten mit seinem Bruder Hermann Grassmann, wie wohl nur wenige andere eingeweiht in die Gedanken und in die Entwicklung dieses Buches, hatte wiederholt an dem Zweige gearbeitet und konnte diesem Hauptzweige der Mathematik durch die Vergleiche und durch die Heranziehung der andern Hauptzweige der Denklehre eine erneute und in einzelnen Begriffen wohl noch verbesserte und klarere Gestaltung geben. Der Verfasser hat daher diesen Hauptzweig neu ausgearbeitet.

---



1. The first part of the paper is devoted to a general discussion of the problem.

2. In the second part, we shall consider the case of a single particle.

3. The third part is devoted to the case of a system of particles.

4. In the fourth part, we shall consider the case of a continuous medium.

5. The fifth part is devoted to the case of a system of continuous media.

6. In the sixth part, we shall consider the case of a single continuous medium.

7. The seventh part is devoted to the case of a system of continuous media.

8. In the eighth part, we shall consider the case of a single continuous medium.

9. The ninth part is devoted to the case of a system of continuous media.

10. In the tenth part, we shall consider the case of a single continuous medium.

11. The eleventh part is devoted to the case of a system of continuous media.



# Inhaltsverzeichnis.

## Einleitung in die Ausdehnungslehre.

|                                           | Nummer. | Seite. |
|-------------------------------------------|---------|--------|
| 1. Die Grundgesetze der Größenlehre ..... | 1       | 2      |

### Erster Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Gebietslehre.

|                                                        |    |    |
|--------------------------------------------------------|----|----|
| 2. Die freien und die hörigen Größen .....             | 9  | 5  |
| 3. Die Gebiete und deren Zurückleitung .....           | 21 | 10 |
| 4. Die Gesetze der Grösengebiete .....                 | 30 | 13 |
| 5. Die Zeuge oder Produkte von Ausdehnungsgrößen ..... | 68 | 25 |

### Zweiter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Flachungslehre.

|                                                        |     |    |
|--------------------------------------------------------|-----|----|
| 6. Die Gesetze der Flachungslehre .....                | 81  | 34 |
| 7. Die linige Aenderung der Größen erster Klasse ..... | 110 | 44 |
| 8. Die Fläche der Größen höherer Klassen .....         | 115 | 46 |

### Dritter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Modlungslehre.

|                                                      |     |    |
|------------------------------------------------------|-----|----|
| 9. Die grundlegenden Gesetze der Modlungslehre ..... | 126 | 50 |
| 10. Die allgemeinen Sätze für Enfläche .....         | 145 | 57 |
| 11. Die reinen und die gemischten Enfläche .....     | 164 | 72 |
| 12. Die Zurückleitung auf ein niederes Gebiet .....  | 179 | 85 |

### Vierter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Innungslehre.

|                                             |     |     |
|---------------------------------------------|-----|-----|
| 13. Die Grundgesetze der Innungslehre ..... | 186 | 93  |
| 14. Normverein und Kreifeländerung .....    | 201 | 99  |
| 15. Die normige Zurückleitung .....         | 213 | 105 |
| 16. Die Winkelfolgen der Innenzeuge .....   | 246 | 121 |

### Anhang: Anwendung der Ausdehnungslehre zur Lösung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

|                                                                                    |     |     |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|
| 1. Die Lösung der Gleichungen ersten Grades mit $m$ Unbekannten ...                | 268 | 128 |
| 2. Die Entfernung aller Unbekannten aus $m + 1$ Gleichungen ersten<br>Grades ..... | 269 | 130 |
| 3. Die Entfernung der Unbekannten aus 2 Gleichungen höhern Grades                  | 270 | 131 |



# THE HISTORY OF THE

## AMERICAN PEOPLE

FROM THE FIRST SETTLEMENTS TO THE PRESENT TIME

BY JAMES O. HARRIS

IN TWO VOLUMES

VOLUME I

FROM THE FIRST SETTLEMENTS TO THE PRESENT TIME

BY JAMES O. HARRIS

IN TWO VOLUMES

VOLUME I

FROM THE FIRST SETTLEMENTS TO THE PRESENT TIME

BY JAMES O. HARRIS

IN TWO VOLUMES

VOLUME I

FROM THE FIRST SETTLEMENTS TO THE PRESENT TIME

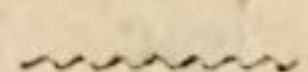
BY JAMES O. HARRIS

IN TWO VOLUMES

VOLUME I



## Einleitung in die Ausdehnungslehre.



Die Idee der Ausdehnungslehre. Zum leichten Verständnisse der Ausdehnungslehre ist es wichtig, dass man sich mit der Idee der Ausdehnungslehre vertraut mache.

In der Zahlenlehre hatten wir nur eine Einheit, die Eins, und erzeugten durch fortschreitendes Zufügen der Eins die Zahlen, welche wir sämtlich unter einander ungleich setzten und dann weiter verknüpften.

In der Ausdehnungslehre setzen wir nun verschiedene Einheiten, und nennen eine Gröse eine neue Einheit, wenn sie sich nicht als Vielfachenfumme der andern Einheiten darstellen lässt. Wie bei allen mathematischen Zweigen gilt auch bei ihr das Gesetz der mathematischen Zufügung, dass alle durch fortschreitendes Zufügen dieser Einheiten entstandenen Grösen sämtlich einander wie den Einheiten ungleich sein sollen, mit andern Worten, auch hieraus folgt, dass sich nicht eine Einheit als Vielfachenfumme der andern Einheiten darstellen lässt, dass sich also nicht

$e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \dots + \alpha_n e_n$  setzen lässt, wo  $\alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$  reine oder reelle Zahlen sind.

Für die Ausdehnungslehre gilt, wie für alle Zweige der Denklehre, die Einigung beim Fügen. Es gilt hier aber auch die Vertauschung; denn will man  $(e_1 + e_2) + (e_1 + e_2)$  zufügen können, so muss man  $e_1$  und  $e_2$  vertauschen dürfen und erhält dann  $2(e_1 + e_2) = e_1 + e_1 + e_2 + e_2 = 2e_1 + 2e_2$ . Es gelten dann auch für die Ausdehnungslehre alle Gesetze des Zufügens und Abziehens, des Vervielfachens und des Teilens mit Zahlen, wie bei der Zahlenlehre.

Es gelten dann aber ausserdem zunächst die folgenden Gesetze. Wenn  $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$  ist, so müssen  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$  sämtlich gleich Null sein; denn sollte auch nur eine z. B.  $\alpha_1$  ungleich Null sein, so könnte man alle

Glieder durch  $\alpha_1$  teilen und erhielte dann  $e_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} e_n = 0$ , d. h.  $e_1$  als eine Vielfachenfumme der andern, was gegen die Erklärung der neuen Einheit ist.

Ferner sind in der Ausdehnungslehre zwei Grösen

$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$  und  $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$  dann und



nur dann gleich, wenn  $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$  ist; denn zieht man die zweite von der ersten ab, so erhält man

$$a - b = 0 = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2 = \dots + (\alpha_n - \beta_n) e_n$$

und hier muss, wie bewiesen  $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0$  sein, woraus unmittelbar  $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$  folgt.

In der Ausdehnungslehre kann man nun auch die Einfachen oder Einheiten miteinander weben oder multiplizieren. Auch hier muss für das Weben Einigung gelten, wenn man überhaupt Formveränderungen zulassen will. Dagegen darf man nicht  $ee = e$  setzen, denn beachtet man, dass nach der Größenlehre  $e \cdot 1 = e$

und auch  $1 = \frac{e}{e}$  ist, so erhält man dann

$$e = e \cdot 1 = e \cdot \frac{e}{e} = \frac{ee}{e} = \frac{e}{e} = 1$$

d. h. es werden dann alle Einfachen gleich 1 und wir find dann wieder in der Zahlenlehre, nicht in der Ausdehnungslehre.

Wir müssen also  $ee$  ungleich  $e$  setzen, das Einfachste ist  $ee$  gleich Null zu setzen. Soll dann auch eine andere Gröse als Einfaches oder Einheit gesetzt werden können, z. B.  $e_1 + e_2$ , so ergibt sich

$$0 = (e_1 + e_2)(e_1 + e_2) = e_1 e_1 + e_1 e_2 + e_2 e_1 + e_2 e_2 \text{ d. h. da } e_1 e_1 = 0 \text{ und } e_2 e_2 = 0, \text{ so bleibt } 0 = e_1 e_2 + e_2 e_1 \text{ oder } e_2 e_1 = -e_1 e_2.$$

Diese Art der Webung nennt man eine Flachung (kombinatorische Multiplikation), das Ergebniss ein Flach. Für die Flachung find also nur die Fläche verschiedener Einheiten ungleich Null und gilt keine Vertauschung. Zur Unterscheidung von andern Zeugen oder Produkten setzt man das Flach in scharfe Klammer, also  $[e_1 e_2]$ .

Wir können aber auch  $e_a e_a$  ungleich Null setzen. Setzen wir hier das Zeug oder Produkt verschiedener Einheiten gleich Null, so erhalten wir die innere Webung, welche sich jedoch leicht auf die Flachung zurückführen lässt. Die Flachung ist daher die eigentliche Webung der Ausdehnungslehre.

Man kann endlich sowohl das Zeug oder Produkt gleicher Einheiten, als auch das verschiedener Einheiten ungleich Null setzen und dann Vertauschung gelten lassen, dann erhält man

$$(e_1 + e_2)(e_1 + e_2) = e_1 e_1 + e_1 e_2 + e_2 e_1 + e_2 e_2 = (e_1 e_1 + e_2 e_2) + 2e_1 e_2$$

Die Webung heist dann eine Flechtung, das Ergebniss ein Flecht, (dies Flecht entspricht ganz der Richtgröse oder komplexen Gröse  $a + ib$  in der Zahlenlehre, wo  $i = (-1)^{1/2}$  ist). Diese letzte Art der Webung gehört aber nicht mehr der Ausdehnungslehre, sondern dem höhern Zweige der Ausenlehre oder der Synthesis, nämlich der Erweiterungslehre, an.

## 1. Die Grundgesetze der Größenlehre.

1. **Erklärung.** Die Ausdehnungslehre oder die niedere Synthesis ist der Zweig der Mathematik, für welchen auch Grösen mit verschiedenen Einheiten zugefügt und gewebt werden und für welchen das Zeug oder Produkt mehrer Einheiten wieder eine neue Einheit giebt.



**Erklärung.** Die Größen der Ausdehnungslehre sind entweder 2.  
Einheiten, oder Vielfache der Einheiten oder Vielfachensummen. Die  
Vielfachensumme der Größen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  heist eine GröÙe von der  
Form  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \sum_{1,n} \alpha_a a_a$ , die reinen oder reellen  
Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  heißen die **Vorzahlen** oder die **Koeffizienten**, die  
Größen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  heißen die Größen der **Vielfachensummen**.

**Satz.** Für die Ausdehnungslehre gelten die Grundformeln und 3.  
daraus abgeleitet folgende Gesetze der Größenlehre. Man kann ohne  
Änderung des Wertes

- 1) jede Plus- und Malklammer beliebig setzen oder weglassen  
und die Ordnung der Stücke beliebig ändern,
- 2) beim Weben oder Multiplizieren jede Beziehungsklammer auf-  
lösen, indem man jedes Stück des einen Faktors mit jedem  
des andern webt oder multipliziert.
- 3) Das Ergebniss jeder dieser Knüpfungen ist wieder eine Ein-  
heitsgröÙe, das Zeug oder Produkt der Einheiten ist wieder  
eine Einheit.

**Beweis:** Unmittelbar, da alle Zweige der Mathematik nur Zweige  
der Größenlehre sind, wie sie oben in der Größenlehre entwickelt und  
bewiesen ist.

Es ist zweckmäÙig hier darauf aufmerksam zu machen, dass man zwar die  
Ordnung der Stücke beliebig ändern kann, nicht aber die Ordnung der Fache  
oder Faktoren, für welche keine Vertauschung gilt. Es ist zwar  $\alpha a = a\alpha$ , wo  $\alpha$   
eine Zahl ist; aber nicht ist  $e_1 e_2 = e_2 e_1$ .

**Satz.** Für die Größen der Ausdehnungslehre gelten alle Gesetze 4.  
der Zahlenlehre über das Zufügen und Abziehen und über das Vervielf-  
fachen und Teilen mit Zahlen.

**Beweis:** Die Größen der Ausdehnungslehre sind entweder Einheiten  
oder Vielfachensummen von Einheiten. Für die Einheiten der Aus-  
dehnungslehre gelten nun genau dieselben Erklärungen, wie für die Ein-  
heitender Zahlenlehre, mithin gelten auch für die Einheiten der Aus-  
dehnungslehre und für die aus ihnen abgeleiteten Vielfachensummen alle  
Gesetze, welche in der Zahlenlehre aus diesen Erklärungen abgeleitet  
sind, d. h. alle Gesetze des Zufügens und Abziehens, alle Gesetze des  
Vervielfachens und Teilens mit Zahlen.

**Erklärung.** Einander ersetzend heißen zwei Vereine von 5.  
Gleichungen, wenn sich jeder von den beiden Vereinen aus dem andern  
ableiten lässt.



6. Satz. Wenn eine Gröse  $b$  das Vielfache  $\alpha a$  ist einer andern Gröse  $a \geq 0$ , so kann man statt  $\frac{b}{a}$  die Zahl  $\alpha$  setzen, oder es ist

$$\frac{\alpha a}{a} = \alpha, \text{ wenn } a \geq 0.$$

Beweis: Unmittelbar aus Satz 4 und Zahlenlehre 167.

7. Satz. Wenn zwei Grösen  $a$  und  $b$ , deren zweite nicht Null ist, Vielfache find derfelben dritten Gröse  $c$ , so kann man statt die erste durch die zweite zu teilen, die Vorzahlen entsprechend teilen oder es ist

$$\frac{\alpha c}{\beta c} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ wenn } \beta c \geq 0.$$

Beweis: Unmittelbar aus Satz 4 und Zahlenlehre 182.

8. Satz. Eine Gleichung, deren Glieder alle Vielfache find derfelben Gröse  $a$  ungleich Null, wird durch eine Zahlgleichung ersetzt, welche man erhält, indem man in allen Gliedern die Gröse  $a$  fortlässt oder

$$\text{die Gleichung } \alpha a + \beta a + \dots = \alpha_1 a + \beta_1 a + \dots$$

wird ersetzt durch die Zahlgleichung

$$\alpha + \beta + \dots = \alpha_1 + \beta_1 + \dots$$

Beweis: Unmittelbar aus Satz 6, wenn man beide Seiten durch  $a \geq 0$  teilt.



## Erster Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Gebietslehre.

### 2. Die freien und die hörigen Größen.

**Erklärung.** Hörig zu den Größen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  heist eine 9. Größe  $b$ , wenn sie sich als Vielfachensumme dieser Größen darstellen lässt, oder wenn

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \sum_{1,n} \alpha_a a_a \text{ ist.}$$

**Frei** von den Größen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  heist eine Größe, wenn sie sich nicht als Vielfachensumme dieser Größen darstellen lässt.

Eine Reihe von Größen ist eine freie Größenreihe, oder die Größen sind gegenseitig frei, wenn jede frei von allen andern ist.

Eine Hörigkeit oder Abhängigkeit herrscht in einer Größenreihe, wenn sich irgend eine derselben als Vielfachensumme der andern darstellen lässt.

**Deckend** oder **kongruent** heissen zwei Größen ungleich Null, wenn die eine das Vielfache der andern ist. Das Zeichen des Deckens ist  $\equiv$ . z. B.  $a \equiv b$ .

**Satz.** Jede Einheit ist von allen andern Einheiten frei. Jede 10. Vielfachensumme von Einheiten ist zu ihren Einheiten hörig.

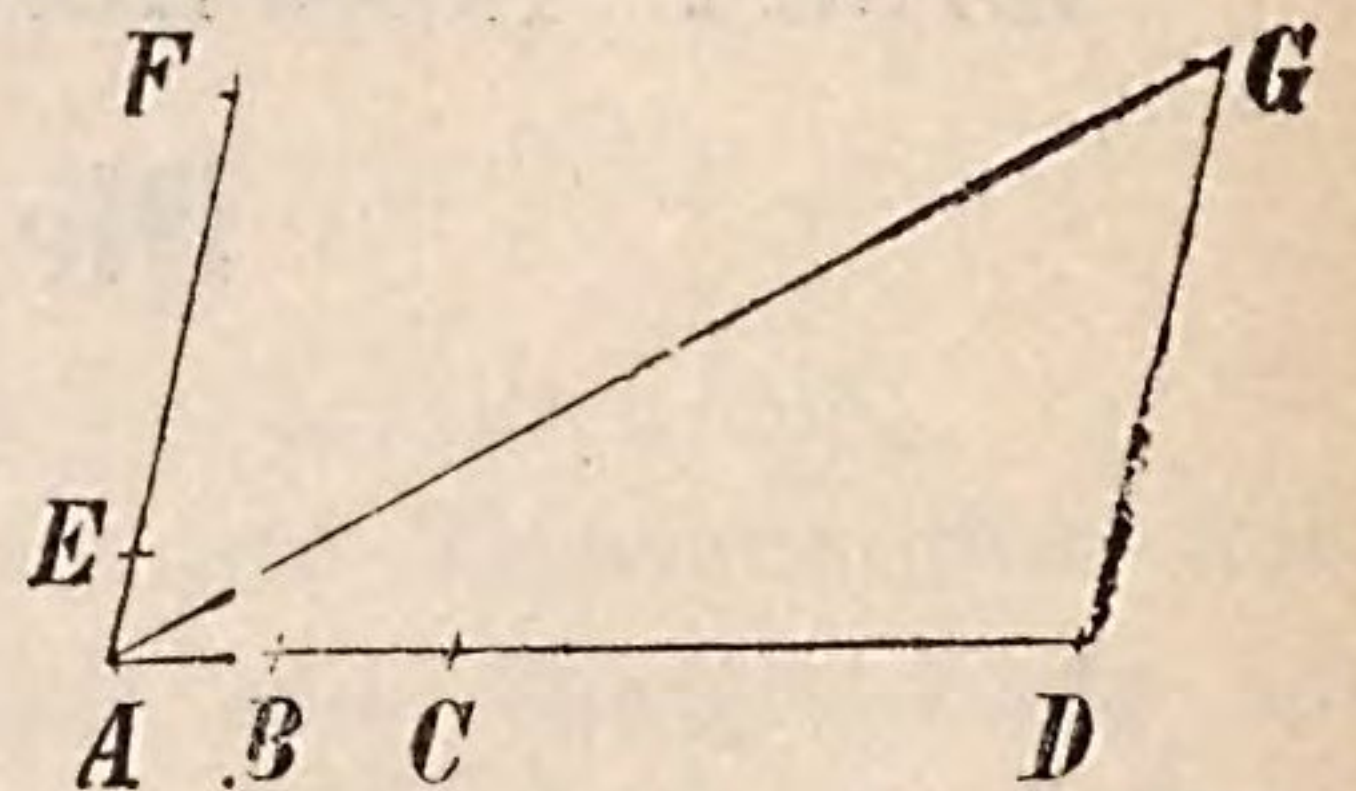
**Beweis:** Wir haben für die Mathematik festgestellt, dass die durch fortschreitendes Zufügen von Einheiten entstandenen Größen sämtlich einander und den Einheiten ungleich sein sollen, dass also auch nicht eine Einheit einer Vielfachensumme der andern Einheiten gleich sein kann; daraus folgt der erste Teil des Satzes, der zweite folgt unmittelbar aus 9.



Es ist dringend zu wünschen, dass sich jeder ein anschauliches Bild von den Verhältnissen mache, damit er die Verhältnisse sinnlich anschauet und Sicherheit in den Betrachtungen gewinne. Ein ausgezeichnetes Hilfsmittel zu diesem Zwecke bieten die räumlichen Verhältnisse.

Sei also  $AB$  die Einheit  $e_1$  und sei  $AC$  auf derselben oder auf einer gleichlaufenden Linie doppelt so lang, so ist  $AC = 2e_1$ , sei  $AD$   $\alpha$ mal so lang, so ist  $AD = \alpha e_1$  und sind alle diese Strecken gegenseitig deckend. Sei dagegen  $AE$  auf einer Linie, welche die obige schneidet, so kann  $AE$  nie einem Vielfachen von  $e_1$  gleichgesetzt werden, es ist also von  $e_1$  frei und kann als eine neue Einheit  $e_2$  gesetzt werden, dann sind alle Strecken auf der Linie  $AE$  Vielfache von  $e_2$ , also  $AF = \beta e_2$ .

Setzen wir nun  $AD$  und  $AF$  an einander, in der Weise, dass  $DG$  gleichlaufend und gleichlang mit  $AF$  ist, so ist die Strecke  $AG = AD + AF = \alpha e_1 + \beta e_2$  also eine Vielfachensumme von  $e_1$  und  $e_2$ , und zu diesen beiden Einheiten hörig, während  $e_1$  und  $e_2$  gegenseitig frei sind.



Es wird nun unsere Aufgabe sein, auch für andere Größen zu untersuchen, wann sie gegenseitig frei sind, wann nicht.

11. **Satz. Null ist zu jeder Größenreihe hörig.**

Beweis: Was auch  $a_1 a_2 \dots$  für Größen sein mögen, so ist

$$0 = \sum \alpha_a a_a \text{ wo } \alpha_a = 0 \quad (\text{nach Zahlenlehre 134 und 174})$$

12. **Satz. Eine Gröse, welche zu den Größen  $a_1 \dots a_n$  hörig ist, vervielfacht oder teilt man mit einer Zahl, indem man die Vorzahlen mit dieser Zahl vervielfacht oder teilt.**

Beweis: Es sei die Gröse  $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$  und sei  $\beta$  eine Zahl, so ist

$$\begin{aligned} 1. \quad \beta b &= \beta(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n) \\ &= \beta\alpha_1 a_1 + \beta\alpha_2 a_2 + \dots + \beta\alpha_n a_n \end{aligned}$$

(nach Satz 4 und Zahlenlehre 169)

$$2. \text{ Ebenso ist } \frac{b}{\beta} = \frac{1}{\beta} b = \frac{1}{\beta} \alpha_1 a_1 + \frac{1}{\beta} \alpha_2 a_2 + \dots + \frac{1}{\beta} \alpha_n a_n$$

(nach 12,1)

$$= \frac{\alpha_1}{\beta} a_1 + \frac{\alpha_2}{\beta} a_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\beta} a_n$$

(nach Satz 4 und Zahlenlehre 180)

13. **Satz. Eine Gröse, welche mit einer zweiten zu denselben Größen  $a_1 \dots a_n$  hörig ist, fügt man zu oder zieht man ab, indem man die entsprechenden Vorzahlen der Größen  $a_1 \dots a_n$  zufügt oder abzieht.**

Beweis: Es sei  $b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$  und  $c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n$ , so ist



$$1. \quad b + c = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n + (\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n) \\ = (\beta_1 + \gamma_1) a_1 + (\beta_2 + \gamma_2) a_2 + \dots + (\beta_n + \gamma_n) a_n \\ \text{(nach 3 und Zahlenlehre 183)}$$

2.  $b - c$ . Um den Satz für  $b - c$  zu beweisen und Satz 13<sub>1</sub> anwenden zu können, müssen wir statt  $b - c$  die Grö<sub>s</sub>en  $b + (-c) = b + (-1)c$  nehmen, welche nach Satz 4 und Zahlenlehre 133 gleich  $b - c$  find. Dann ist

$$b - c = b + (-1)c = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n \\ + (-1)(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n) \\ = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n + ((-1)\gamma_1 a_1 \\ + (-1)\gamma_2 a_2 + \dots + (-1)\gamma_n a_n) \quad \text{(nach 12)} \\ = (\beta_1 + (-1)\gamma_1) a_1 + (\beta_2 + (-1)\gamma_2) a_2 + \dots + (\beta_n + (-1)\gamma_n) a_n \\ \text{(nach 13<sub>1</sub>)} \\ = (\beta_1 - \gamma_1) a_1 + (\beta_2 - \gamma_2) a_2 + \dots + (\beta_n - \gamma_n) a_n \\ \text{(nach 4 und Zahlenlehre 133)}$$

**Satz.** Zwischen  $n$  Grö<sub>s</sub>en  $a_1 \dots a_n$  herrscht dann und nur dann 14. eine H<sub>ö</sub>rigkeit, wenn sich eine Gleichung

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0$$

aufstellen lässt, in welcher wenigstens eine der Zahlen  $\alpha_n$  ungleich Null ist.

**Beweis:** 1. Wenn in der Gleichung  $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0$  auch nur eine der Zahlen z. B.  $\alpha_1$  ungleich Null ist, so lässt sich die Gleichung durch  $\alpha_1$  teilen und ist

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} a_3 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} a_n \quad \text{(nach Satz 12 und 13),}$$

2. Wenn eine der Grö<sub>s</sub>en  $a_1 \dots a_n$ , z. B.  $a_1$  zu den andern h<sub>ö</sub>rig ist, so sei

$$a_1 = \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n,$$

so ist  $-a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n = 0$  (nach Zahlenlehre 135) und ist also mindestens die Vorzahl von  $a_1$  d. h.  $\alpha_1$  ungleich Null.

**Satz.** Eine Grö<sub>s</sub>e, welche zu der freien Grö<sub>s</sub>enreihe  $a_1 \dots a_n$  15. h<sub>ö</sub>rig ist, ist dann und nur dann Null, wenn ihre  $n$  Vorzahlen Null sind oder die Gleichung (a)  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$ , wo  $a_1 \dots a_n$  eine freie Grö<sub>s</sub>enreihe, wird ersetzt durch die  $n$  Zahlengleichungen

$$(b) \quad \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0.$$

**Beweis:** 1. Angenommen, es wäre eine der Vorzahlen ungleich Null, so würde nach Satz 14 zwischen den Grö<sub>s</sub>en  $a_1 \dots a_n$  ein H<sub>ö</sub>rigkeit herrschen, was wider die Voraussetzung ist. Gilt also die Gleichung (a), so gelten auch die  $n$  Gleichungen (b).



2. Umgekehrt, wenn die  $n$  Gleichungen (b) gelten, so folgt daraus auch nach Zahlenlehre 134 und 174 die Gleichung (a); also sind beide Vereine von Gleichungen einander ersetzend.

16. **Satz.** Zwei Größen, welche zu derselben freien Größenreihe  $a_1 \dots a_n$  hörig sind, sind dann und nur dann einander gleich, wenn ihre  $n$  zu denselben freien Größen gehörigen Vorzahlen einander gleich sind oder

die Gleichung (a)  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$ , wo  $a_1 \dots a_n$  eine freie Größenreihe, wird ersetzt durch die  $n$  Zahlengleichungen

$$(b) \quad \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n.$$

Beweis: Aus der Gleichung (a) folgt nach Zahlenlehre 135 und Ausdehnungslehre 13

$$(\alpha_1 - \beta_1) a_1 + (\alpha_2 - \beta_2) a_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) a_n = 0.$$

Diese Gleichung aber wird nach Satz 15 ersetzt durch die  $n$  Gleichungen

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \alpha_2 - \beta_2 = 0, \dots, \alpha_n - \beta_n = 0,$$

d. h. nach Zahlenlehre 135 durch die  $n$  Gleichungen

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n.$$

17. **Satz.** Jede Gleichung, deren Glieder Vielfache sind von Größen, welche sämtlich zu der freien Größenreihe  $g_1 \dots g_n$  gehörig sind, wird ersetzt durch  $n$  Zahlengleichungen, welche man erhält, indem man statt jeder Größe ihre zu derselben freien Größe  $g_i$  gehörige Vorzahl setzt, oder

die Gleichung (a)  $\alpha a + \beta b + \dots = \kappa k + \lambda l + \dots$

in welcher  $a = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n$   $k = \kappa_1 g_1 + \kappa_2 g_2 + \dots + \kappa_n g_n$   
 $b = \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \dots + \beta_n g_n$   $l = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots + \lambda_n g_n$   
 $\vdots$   $\vdots$

wo  $g_1 \dots g_n$  eine freie Größenreihe ist, wird ersetzt durch die  $n$  Zahlengleichungen

$$(b) \quad \begin{cases} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \dots = \kappa\kappa_1 + \lambda\lambda_1 + \dots \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \dots = \kappa\kappa_2 + \lambda\lambda_2 + \dots \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \dots = \kappa\kappa_n + \lambda\lambda_n + \dots \end{cases}$$

Beweis: Setzt man in der Gleichung (a) für die Größen  $a b \dots k l \dots$  ihre Werte, so erhält man nach Satz 12 und 13

$$(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \dots) g_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \dots) g_2 + \dots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \dots) g_n \\ = (\kappa\kappa_1 + \lambda\lambda_1 + \dots) g_1 + (\kappa\kappa_2 + \lambda\lambda_2 + \dots) g_2 + \dots + (\kappa\kappa_n + \lambda\lambda_n + \dots) g_n$$



und diese Gleichung wird nach Satz 16 ersetzt durch die  $n$  Zahlen-  
gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \dots &= \kappa\kappa_1 + \lambda\lambda_1 + \dots \\ \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \dots &= \kappa\kappa_2 + \lambda\lambda_2 + \dots \\ \vdots & \\ \alpha\alpha_n + \beta\beta_n + \dots &= \kappa\kappa_n + \lambda\lambda_n + \dots \end{aligned}$$

**Satz.** Wenn in einer Reihe von Größen, deren erste ungleich Null ist, jede folgende von allen vorhergehenden frei ist, so ist die Reihe eine freie Größenreihe. 18.

Beweis: Angenommen, die Größenreihe sei nicht frei, so herrscht nach Satz 9 zwischen den Größen eine Hörigkeit, und ist also nach Satz 14 in der Gleichung  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$ , wenigstens eine der Vorzahlen  $\alpha_a$  ungleich Null. Sei nun  $\alpha_r$  die letzte Vorzahl ungleich Null, so kann  $r$  entweder gleich 1 oder größer als 1 sein. Wäre nun  $r = 1$ , so wäre  $\alpha_1 a_1 = 0$ , mithin da  $\alpha_1 \neq 0$ , so wäre  $a_1 = 0$  (nach 4 und Zahlenlehre 175) was gegen die Voraussetzung ist. Wäre aber  $r > 1$ , so wäre

$$a_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_r} a_2 - \dots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_r} a_{r-1} \quad (\text{nach Satz 12 und 13})$$

mithin  $a_r$  zu den vorhergehenden Größen hörig, was wieder gegen die Voraussetzung ist. Es kann also zwischen den Größen  $a_1 a_2 \dots a_n$  keine Hörigkeit herrschen.

**Satz.** Wenn zwischen  $n$  Größen, welche nicht alle Null sind, eine Hörigkeit herrscht, so lässt sich stets aus ihnen eine freie Größenreihe aussondern, zu der die andern Größen hörig sind. 19.

Beweis: Es seien  $a_1 \dots a_n$  die  $n$  Größen, so muss sich nach Satz 9 eine als Vielfachensumme der andern darstellen lassen, es sei dies  $a_n$  und sei

$$a_n = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1}.$$

Herrscht nun zwischen den Größen  $a_1 \dots a_{n-1}$  abermals eine Hörigkeit, so muss sich nach Satz 9 abermals eine als Vielfachensumme der andern darstellen lassen. Es sei dies  $a_{n-1}$  und sei

$$a_{n-1} = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_{n-2} a_{n-2}$$

Führt man diesen Ausdruck in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_{n-1} \beta_1) a_1 + (\alpha_2 + \alpha_{n-1} \beta_2) a_2 + \dots + (\alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} \beta_{n-2}) a_{n-2} \quad (\text{nach Satz 12 und 13}).$$



Es ist dann also auch  $a_n$  eine Vielfachenfumme der Grösen  $a_1 \cdots a_{n-2}$ .

Auf gleiche Weise ergibt sich, dass, wenn zwischen den Grösen  $a_1 \cdots a_{n-r}$  noch eine Hörigkeit herrscht, man eine derselben als Vielfachenfumme der andern darstellen kann, etwa  $a_{n-r}$ , und dass, indem man für diese Gröse ihre Vielfachenfumme einschiebt, alle bisher als Vielfachenfummen der Grösen  $a_1 \cdots a_{n-r}$  dargestellten Grösen demnächst Vielfachenfummen der Grösen  $a_1 \cdots a_{n-r-1}$  werden, bis man zuletzt entweder zu einer freien Grösenreihe, oder zu einer einzigen Gröse  $a_1$  gelangt, von welcher alle andern Grösen Vielfachenfummen sind. Im letzten Falle darf wenigstens diese Gröse nicht Null sein, da sonst (nach Satz 4 und Zahlenlehre 174) alle andern Grösen als Vielfache derselben Null wären, was der Voraussetzung widerstreitet. In jedem Falle gelangt man also zu einer freien Grösenreihe, zu der die andern Grösen hörig sind.

20. **Satz.** Jede Gröse der Ausenlehre lässt sich darstellen in der Form

$$b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

wo  $\alpha_1 \cdots \alpha_n$  Zahlen sind und die Grösen  $a_1 \cdots a_n$  eine freie Grösenreihe bilden.

Beweis: In dem Ausdrücke, der  $b$  gleich ist, lassen sich nach Satz 4, Zahlenlehre 180 und 183 alle Klammern lösen und erscheint mithin die Gröse  $a$  als eine Vielfachenfumme, in der jedes Glied ein Zeug oder Produkt ist einer Zahl mit einer Gröse der Ausdehnungslehre. Zwischen diesen Grösen kann nun noch eine Hörigkeit herrschen; entfernt man aber die zu den andern Grösen hörigen in der Weise des Satzes 19, so bleibt zuletzt  $a$  als eine Vielfachenfumme übrig, in der ausser den Zahlen nur gegenseitig freie Grösen vorkommen.

Es ist wünschenswert, dass sich jeder eine Anschauung von diesen neuen Grösen verschaffe. Die dehnende Raumlehre des Verfassers bietet hierzu eine treffliche Gelegenheit und erlaube ich mir hier auf dieselbe zu verweisen.

### 3. Die Gebiete und deren Zurückleitung.

21. **Erklärung.** Das Gebiet der Grösen  $a_1 \cdots a_n$  heist die Gesamtheit der zu den Grösen  $a_1 \cdots a_n$  hörigen Grösen. Gebiet  $n$ ter Stufe heist ein Gebiet, wenn die Grösen desselben sich als Vielfachenfummen von nicht weniger als  $n$  gegenseitig freien Grösen erster Stufe darstellen lassen.

Die reinen Zahlen bilden ein Gebiet nullter Stufe.

Zwei Gebiete heissen einander deckende Gebiete, wenn das eine dem andern gleich oder ein Vielfaches des andern ist.



Das Zeichen  $\circ$  vor einem Buchstaben z. B.  $\circ A$  gelesen „Gebiet A“ bezeichnet das Gebiet jener Gröse. Das Zeichen  $\circ (e_1, e_2, \dots, e_n)$  bezeichnet das Gebiet der Grösen  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Die ursprünglichen Einheiten und die Vielfachen und Vielfachensummen derselben heissen Grösen erster Klasse.

In dem Beispiele in der Anmerkung zu Satz 10 ist  $AG = \alpha e_1 + \beta e_2$  eine Gröse erster Klasse, die Ebene durch die Punkte ABE d. h. die Ebene, welche die Gesamtheit der zu den Einheiten  $e_1$  und  $e_2$  hörigen Grösen  $\alpha e_1 + \beta e_2$  umfasst, das Gebiet der Grösen  $e_1$  und  $e_2$  und zwar ein Gebiet zweiter Stufe.

Ganz ebenso ist der Raum ein Gebiet dritter Stufe gebildet aus drei gegenseitig freien Grösen  $e_1, e_2$  und  $e_3$ , welche, da sie gegenseitig frei sein sollen, nicht derselben Ebene angehören dürfen.

**Satz.** Wenn eine Gröse erster Klasse  $a_1$  zu  $n$  Grösen erster Klasse  $b_1 \dots b_n$  hörig und die zu  $b_1$  gehörige Vorzahl in dem Ausdrucke für  $a_1$  ungleich Null ist, so ist das Gebiet der  $n$  Grösen  $a_1 b_2 \dots b_n$  gleich oder deckend dem Gebiete der  $n$  Grösen  $b_1 b_2 \dots b_n$ . 22.

Beweis: Es sei  $a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$ , wo  $\alpha_1 \geq 0$ , dann ist

$$b_1 = \frac{1}{\alpha_1} a_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} b_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} b_n.$$

Dann aber ist auch jede Gröse  $c$  des Gebietes  $b_1 b_2 \dots b_n$  z. B.

$$\begin{aligned} c &= \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_n b_n \\ &= \frac{\gamma_1}{\alpha_1} a_1 + \left( \gamma_2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) b_2 + \dots + \left( \gamma_n - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \right) b_n. \end{aligned}$$

d. h. auch eine Gröse des Gebietes  $a_1 b_2 \dots b_n$ .

Ebenso ist jede Gröse  $d$  des Gebietes  $a_1 b_2 \dots b_n$  z. B.

$$\begin{aligned} d &= \delta_1 a_1 + \delta_2 b_2 + \dots + \delta_n b_n \\ &= \delta_1 \alpha_1 b_1 + (\delta_2 + \delta_1 \alpha_2) b_2 + \dots + (\delta_n + \delta_1 \alpha_n) b_n \end{aligned}$$

d. h. auch eine Gröse des Gebietes  $b_1 b_2 \dots b_n$ .

**Satz.** Wenn  $m$  gegenseitig freie Grösen erster Klasse  $a_1 \dots a_m$  zu  $n$  Grösen erster Klasse  $b_1 \dots b_n$  hörig sind, so kann man zu den  $m$  Grösen  $a_1 \dots a_m$  stets noch  $n - m$  Grösen erster Klasse  $a_{m+1} \dots a_n$  von der Art hinzufügen, dass die Grösen  $b_1 \dots b_n$  auch zu  $a_1 \dots a_n$  hörig sind und also das Gebiet der Grösen  $a_1 \dots a_n$  dem der Grösen  $b_1 \dots b_n$  gleich ist, auch kann man jene  $n - m$  Grösen aus den Grösen  $b_1 \dots b_n$  selbst entnehmen. 23.

Beweis: 1. Nach der Voraussetzung ist  $a_1$  zu den Grösen  $b_1 \dots b_n$  hörig; es sei also  $a_1 = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$ , so muss, da  $a_1 \geq 0$  ist, mindestens eine der Zahlen  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  ungleich Null sein, es sei dies, da die Zeiger vertauschbar sind,  $\alpha_1$ , so ist nach Satz 22 das Gebiet der Grösen  $a_1 b_2 \dots b_n$  gleich dem Gebiete der Grösen  $b_1 \dots b_n$ .



2. Angenommen, es sei das Gebiet der Größen  $a_1 \cdots a_r b_{r+1} \cdots b_n$ , wo  $r < m$ , gleich oder deckend dem Gebiete der Größen  $b_1 \cdots b_n$ , so muss  $a_{r+1}$ , da es nach der Voraussetzung eine GröÙe des Gebietes  $b_1 \cdots b_n$  ist, auch eine GröÙe des Gebietes  $a_1 \cdots a_r b_{r+1} \cdots b_n$  sein. Es sei demnach  $a_{r+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \beta_n b_n$ , so muss, da nach der Voraussetzung  $a_{r+1}$  frei ist von den Größen  $a_1 \cdots a_r$ , mindestens eine der Vorzahlen  $\beta_{r+1} \cdots \beta_n$  ungleich Null sein. Es sei also  $\beta_{r+1} > 0$ , so ist nach 22 das Gebiet der Größen  $a_1 \cdots a_{r+1} b_{r+2} \cdots b_n$  gleich oder deckend dem Gebiete der Größen  $b_1 \cdots b_n$ . Mithin ist, da das Gebiet der Größen  $a_1 b_2 \cdots b_n$  gleich oder deckend dem der Größen  $b_1 \cdots b_n$  ist, fortleitend auch das Gebiet der Größen  $a_1 \cdots a_m b_{m+1} \cdots b_n$  gleich oder deckend dem der Größen  $b_1 \cdots b_n$ .

24. **Satz.** Wenn  $n$  gegenseitig freie Größen erster Klasse  $a_1 \cdots a_n$  zu  $n$  andern Größen erster Klasse  $b_1 \cdots b_n$  hörig sind, so ist das Gebiet der ersten Größenreihe dem der letztern gleich oder deckend.

Beweis: Unmittelbar aus Satz 23, wenn man  $n$  statt  $m$  setzt.

25. **Satz.** Jedes Gebiet  $n$ ter Stufe kann aus  $n$  beliebigen gegenseitig freien Größen erster Klasse, welche dem Gebiete angehören, abgeleitet werden.

Beweis: Es sei das Gebiet  $n$ ter Stufe ursprünglich aus den  $n$  gegenseitig freien Größen erster Klasse  $a_1 \cdots a_n$  abgeleitet und seien  $b_1 \cdots b_n$  beliebige  $n$  gegenseitig freie Größen erster Klasse, welche nach der Voraussetzung zu dem Gebiete der Größen  $a_1 \cdots a_n$  hörig sind, so ist nach Satz 24 das Gebiet der ersten Größenreihe dem der letztern gleich oder deckend.

26. **Satz.** Wenn  $n$  Größen erster Klasse  $a_1 \cdots a_n$  einem Gebiete von kleinerer als  $n$ ter Stufe angehören, so herrscht zwischen ihnen eine Hörigkeit.

Beweis: Es sei das Gebiet, dem die Größen  $a_1 \cdots a_n$  angehören,  $m$ ter Stufe, wo  $m < n$ , und sei dies Gebiet zu  $m$  Größen  $b_1 \cdots b_m$  hörig. Entweder herrscht nun zwischen den  $m$  Größen  $a_1 \cdots a_m$  eine Hörigkeit und gilt also der Satz, oder sie sind gegenseitig frei. Im letztern Falle ist das Gebiet der Größen  $a_1 \cdots a_m$  nach Satz 24 dem der Größen  $b_1 \cdots b_m$  gleich, dann sind aber auch die Größen  $a_{m+1} \cdots a_n$  nach Satz 25 zu den Größen  $a_1 \cdots a_m$  hörig und herrscht also auch in diesem Falle zwischen den Größen  $a_1 \cdots a_n$  eine Hörigkeit.

27. **Satz.** Wenn ein Gebiet  $n$ ter Stufe zu  $n$  Größen erster Klasse hörig ist, so sind diese gegenseitig frei und umgekehrt, wenn  $n$  Größen erster Klasse gegenseitig frei sind, so ist ihr Gebiet  $n$ ter Stufe.



Beweis: 1. Herrsche zwischen den  $n$  Grösen erster Klasse eine Hörigkeit, so liessen sich einzelne derselben als Vielfachen summen der andern, d. h. von weniger als  $n$  Grösen erster Klasse darstellen und wäre also auch das Gebiet von niedriger als  $n$ ter Stufe (nach Satz 21).

2. Wenn die  $n$  Grösen erster Klasse gegenseitig frei sind, so sind sie nach Satz 26 nicht aus weniger als  $n$  Grösen erster Klasse ableitbar, d. h. ihr Gebiet ist nach Satz 21  $n$ ter Stufe.

**Erklärung.** Zurückleitung der Gröse  $b$  auf das Gebiet 28.  $a_1 \dots a_m$  unter Ausschliesung des Gebietes  $a_{m+1} \dots a_n$  heist die Gröse  $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_m a_m$ , wenn die Gröse  $b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$  ist, wo  $a_1 \dots a_n$  gegenseitig freie Grösen erster Klasse und  $m < n$  ist. Die Zurückleitungen heissen in demselben Sinne genommen, wenn die Grösen auf dasselbe Gebiet unter Ausschliesung desselben Gebietes zurückgeleitet sind.

**Satz.** Jede Gleichung, deren Glieder Zeuge oder Produkte einer Zahl mit einer Gröse erster Klasse sind, bleibt bestehen, wenn man statt aller Grösen der Ausdehnungslehre ihre in demselben Sinne genommenen Zurückleitungen setzt. 29.

Beweis: Die gegebene Gleichung sei  $\alpha a + \beta b + \dots = \kappa k + \lambda l + \dots$  in welcher  $a, b, \dots, k, l, \dots$  denselben Wert haben, wie in Satz 17. Dann wird nach Satz 17 die obige Gleichung ersetzt durch die  $n$  Gleichungen.

$$\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1 + \dots = \kappa \kappa_1 + \lambda \lambda_1 + \dots$$

$$\vdots$$

$$\alpha \alpha_n + \beta \beta_n + \dots = \kappa \kappa_n + \lambda \lambda_n + \dots$$

Verwebt oder multipliziert man nun die ersten  $m$  dieser Gleichungen beziehlich mit  $g_1 \dots g_m$  und fügt die Gleichungen zu, so erhält man

$$\alpha a' + \beta b' + \dots = \kappa k' + \lambda l' + \dots$$

$$\text{wo } a' = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_m g_m$$

$$b' = \beta_1 g_1 + \dots + \beta_m g_m$$

$$\vdots$$

$$k' = \kappa_1 g_1 + \dots + \kappa_m g_m$$

$$l' = \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$$

$$\vdots$$

was zu beweisen war.

Es ist auch hier wieder wünschenswert, dass sich jeder eine Anschauung von diesen neuen Grösen verschaffe. Die deh nende Raumlehre des Verfassers bietet hiezu wieder eine treffliche Gelegenheit und erlaube ich mir hier auf dieselbe zu verweisen.

#### 4. Die Gesetze der Grösengebiete.

**Erklärung.** Das verbindende Gebiet oder die Summe 30. zweier Gebiete heist die Gesamtheit der Grösen, welche zu dem einen oder dem andern der beiden Gebiete hörig sind.



Das gemeinfame Gebiet oder das Zeug (Produkt) zweier Gebiete heist die Gefammtheit der Grösen, welche den beiden Gebieten gemeinfam, d. h. sowohl zu dem einen Gebiete, als auch zugleich zu dem andern Gebiete hörig find.

Das Zeug (Produkt) zweier Gebiete, welche keine Gröse erster Klasse gemeinfam haben, setzen wir gleich Null.

Schneiden sich zwei Ebenen  $\circ(e_1, e_2)$  und  $\circ(e_1, e_3)$  in der geraden Linie  $ae_1$ , so ist die Linie  $ae_1$  das gemeinfame Gebiet oder das Zeug (Produkt) der beiden Gebiete  $\circ(e_1, e_2)$  und  $\circ(e_1, e_3)$ , dagegen find alle Punkte und Linien, welche in den beiden Ebenen  $\circ(e_1, e_2)$  und  $\circ(e_1, e_3)$  enthalten find, das verbindende Gebiet oder die Summe der beiden Ebenen.

31. **Satz.** Die Summe der Stufenzahlen  $m$  und  $n$  zweier Gebiete ist gleich der Summe der Stufenzahl  $g$  ihres gemeinfamen Gebietes und der Stufenzahl  $v$  ihres verbindenden Gebietes, oder es ist

$$m + n = g + v.$$

Beweis. Es sei das Gebiet  $m$ ter Stufe nach Satz 27 das der  $m$  gegenseitig freien Grösen  $a_1 \cdots a_m$ , das  $n$ ter das der gegenseitig freien Grösen  $b_1 \cdots b_n$ , das gemeinfame  $g$ ter Stufe das der gegenseitig freien Grösen  $c_1 \cdots c_g$ , so ist nach Satz 23 das Gebiet der Grösen  $c_1 \cdots c_g a_{g+1} \cdots a_m$  dem der Grösen  $a_1 \cdots a_n$  und das Gebiet der Grösen  $c_1 \cdots c_g b_{g+1} \cdots b_n$  dem der Grösen  $b_1 \cdots b_n$  gleich oder deckend und find die Grösen  $c_1 \cdots c_g a_{g+1} \cdots a_m$  gegenseitig frei und ebenso die Grösen  $c_1 \cdots c_g b_{g+1} \cdots b_n$ .

Das verbindende Gebiet  $v$ ter Stufe aber ist das Gebiet der Grösen  $c_1 \cdots c_g a_{g+1} \cdots a_m b_{g+1} \cdots b_n$ . Angenommen nun, es herrschte hier eine Hörigkeit zwischen den Grösen, so müsste diese die Form haben  $a + b + c = 0$ , wo  $a$  zu  $a_{g+1} \cdots a_m$ ,  $b$  zu  $b_{g+1} \cdots b_n$ ,  $c$  zu  $c_1 \cdots c_g$  hörig wäre. In dieser Gleichung kann nicht  $a = 0$  sein, da sonst  $b + c = 0$  wäre, d. h. eine Hörigkeit zwischen den Grösen  $c_1 \cdots c_g b_{g+1} \cdots b_n$  herrschte, ebenso kann nicht  $b = 0$  sein. Es wäre also  $a = -b - c$ , wo  $a \geq 0$ , d. h. es gehörte  $a$  einerseits dem Gebiete  $a_1 \cdots a_m$  und zugleich andererseits dem Gebiete  $c_1 \cdots c_g b_{g+1} \cdots b_n$  an. Zu den Grösen  $c_1 \cdots c_g$  ist es aber nicht hörig, da  $c_1 \cdots c_g a_{g+1} \cdots a_m$  gegenseitig frei, also hätten die beiden Gebiete  $a_1 \cdots a_m$  und  $b_1 \cdots b_n$  ausser  $c_1 \cdots c_g$  noch eine von diesen freie Gröse gemein, was wider die Voraussetzung ist. Die Annahme ist mithin falsch, und find die Grösen  $c_1 \cdots c_g a_{g+1} \cdots a_m b_{g+1} \cdots b_n$  alle gegenseitig frei, d. h. die Stufenzahl des verbindenden Gebietes  $v$  ist nach Satz 27

$$v = m + n - g \text{ oder } m + n = g + v.$$



**Satz.** Zwei Gebiete  $m$ ter und  $n$ ter Stufe, welche in einem Gebiete  $h$ ter Stufe liegen, haben, wenn  $m + n > h$  ist, mindestens ein Gebiet  $(m + n - h)$ ter Stufe gemein. 32.

Beweis: Sei das verbindende Gebiet  $v$ ter, das gemeinsame  $g$ ter Stufe, so ist nach Satz 31  $g = m + n - v$ , aber  $v \leq h$ , da es in dem Gebiete  $h$  liegen muss, mithin ist

$$g \geq m + n - h.$$

**Satz.** Das Zeug oder Produkt zweier Gebiete, welche keine Gröse erster Klasse gemeinsam haben, ist Null oder 33.

$$[\circ(e_{a_1}, e_{a_2}, \dots, e_{a_n})] \cdot [\circ(e_{b_1}, e_{b_2}, \dots, e_{b_m})] = 0 \text{ * wenn } a_1 \dots a_n \not\geq b_1 \dots b_m.$$

Unmittelbar aus Satz 30.

**Satz.** Für die Gebiete der Ausdehnungslehre gelten alle Sätze der Bestimmungslehre oder der Logik, sofern man in jedem Satze das Wort Begriff bez. Gröse durch das Wort Gebiet ersetzt. 34.

Beweis: Bei den Gebieten der Grösenlehre ist das Gebiet von  $e + e$ , und ebenso das Gebiet von  $e \cdot e$  gleich dem Gebiete von  $e$ , oder es ist  $\circ(e + e) = \circ e$  und  $\circ(e \cdot e) = \circ e$ , kurz es gelten für die Gebiete der Ausdehnungslehre auch die beiden Grundformeln der Logik  $e + e = e$  und  $e \cdot e = e$ .

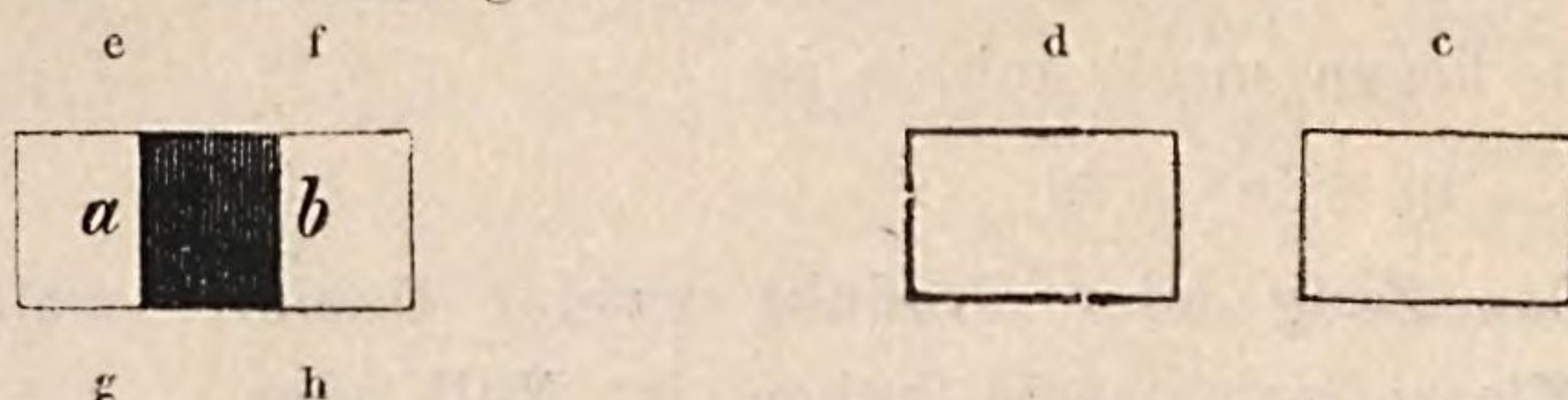
Ferner ist für die Gebiete auch  $\circ e_a + \circ e_b \geq 0$  nach Satz 30 und ist  $(\circ e_a) \cdot [\circ e_b] = 0$ , wenn  $a \not\geq b$  nach Satz 33; also gelten für die Gebiete der Ausdehnungslehre auch die beiden Hauptformeln der Logik  $e_a + e_b \geq 0$  und  $e_a \cdot e_b = 0$ , wenn  $a \not\geq b$  ist. Aus diesen vier Sätzen sind aber alle Sätze der Logik abgeleitet, also gelten auch alle Sätze der Logik für die Gebiete der Ausdehnungslehre, wenn man in jedem Satze das Wort Begriff bez. Gröse durch das Wort Gebiet ersetzt.

Da die Mathematiker meist keine Logik treiben, so scheint ein solches Bezugnehmen auf die Logik bedenklich. Aber will man die Sache streng wissenschaftlich nehmen und alle Sätze beisammen haben, welche man für die Gebiete ableiten kann, so ist es das Kürzeste und Wissenschaftlichste, auf die Logik zurück zu gehen; denn hier sind alle Beweise in kürzester Form gegeben. Ueberdies bieten die in der Logik zur Veranschaulichung aufgeführten Zeichnungen gleichzeitig auch das beste Mittel zur Veranschaulichung der Sätze über die Gebiete in der Ausdehnungslehre. Ich kann daher den geehrten Mathematikern nur empfehlen, an dieser Stelle die Logik zu studiren und die reichsten Anwendungen auf die Gebiete der Ausdehnungslehre zu machen.

Da ich aber nicht hoffen darf, dass die Herren Mathematiker sämtlich hier die Logik einschieben werden, so sehe ich mich hier genötigt, wenigstens die wichtigsten Sätze für die Gebiete abzuleiten.



Für das Anschaulichmachen der Gebiete durch Zeichnung bemerke ich ein für alle Mal, dass die Sache stets so dargestellt werden wird, dass zwei Gebiete nur dann und nur soweit gleiche Einfache enthalten, als sie in denselben Raum fallen oder einander decken, so haben z. B. die Gebiete  $a$  und  $b$  nur das Stück  $efgh$  gemeinsam, sonst lauter verschiedene Einfache, so haben  $d$  und  $c$  gar kein Einfaches gemeinsam.



In der Raumlehre sagt man  $d$  sei gleich  $c$  oder gleich groß mit  $c$ . In der reinen Denk- und Gebietslehre dagegen sind  $d$  und  $c$  ganz ungleich, haben auch nicht einen Punkt, nicht ein Einfaches, nicht ein Element gleich. Es ist wichtig, diesen Unterschied zu beachten, da sonst leicht Verwirrungen entstehen könnten.

Es ist nun aus der Zeichnung einleuchtend, dass  $a + a = a$  ist, denn wenn ich auf  $a$  noch einmal das gleiche  $a$  lege, so ändert dies das  $a$  nicht, ebenso bleibt  $a \cdot a = a$ .

35. **Satz.** Für die Gebiete gelten alle Gesetze der Zufügung und der Verwebung, welche wir in der Größenlehre kennen gelernt haben.

**Beweis.** Unmittelbar nach 30. Denn die Summe, d. h. das verbindende Gebiet bleibt daselbe, ob ich  $e_1 e_2$  mit  $e_3$ , oder ob ich  $e_1$  mit  $e_2$  und  $e_3$  verbinde, und ebenso bleibt es daselbe für  $e_1$  und  $e_2$  wie für  $e_2$  und  $e_1$ . Es gelten also für die Fügung die Grundformeln der Einigung und der Vertauschung und daraus abgeleitet das ganze Gesetz der Zufügung. Ebenso für das Zeug, d. h. für das gemeinsame Gebiet ist das Gebiet, welches dem  $a$  mit dem  $b$  und ausserdem mit dem  $c$  gemeinsam ist, daselbe, als welches dem  $a$  gemeinsam ist mit dem dem  $b$  und  $c$  gemeinsamen Gebiete und ebenso ist das dem  $a$  und  $b$  gemeinsame Gebiet daselbe, wie das dem  $b$  und  $a$  gemeinsame Gebiet, da in beiden Fällen stets dieselben Einheiten gemeinsam bleiben. Es ist also für die Gebiete  $abc = a(bc)$  und  $ab = ba$ , d. h. es gelten die Grundformeln und daraus abgeleitet das Gesetz der Verwebung.

36. **Satz.**  ${}^{\circ}A + {}^{\circ}A = {}^{\circ}A$  |  ${}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}A = {}^{\circ}A$

Die Summe und das Zeug (Produkt) zweier gleichen Gebiete ist wieder daselbe Gebiet.

**Beweis.** Unmittelbar aus Satz 30.

Man muss hier von vorne herein wohl darauf achten, dass für die Gebiete und für die Größen der Ausdehnungslehre ganz verschiedene Gesetze der Zufügung, wie der Webung oder Multiplikation gelten, und dass man daher, wenn



man nicht in Verwirrung geraten will, Gebiete und Grösen genau unterscheiden muss. So ist für Gebiete  $\circ A + \circ A = \circ A$ , dagegen für die Grösen  $A + A = 2A \geq A$ , sofern  $A \geq 0$  ist, so ist für Gebiete  $\circ A \circ A = \circ A$ , dagegen für Grösen  $A \cdot A \geq A$ , sofern  $A \geq 0$  ist.

$$\text{Satz. } n \circ A = \circ A$$

$$(\circ A)^n = \circ A$$

37.

Jede Summe und jedes Zeug oder Produkt gleicher Gebiete ist wieder daselbe Gebiet.

Beweis. Unmittelbar aus 36.

$$\text{Satz. } \circ A = \circ A + \circ A \circ B$$

$$\circ A = \circ A \cdot (\circ A + \circ B)$$

38.

Man kann zu jedem Gebiete ohne Aenderung seines Wertes ein Zeug (Produkt) fügen, in welchem jenes Gebiet ein Fach oder Faktor ist.

Man kann jedes Gebiet ohne Aenderung seines Wertes mit einer Summe weben (multiplizieren), in welcher jenes Gebiet ein Stück ist.

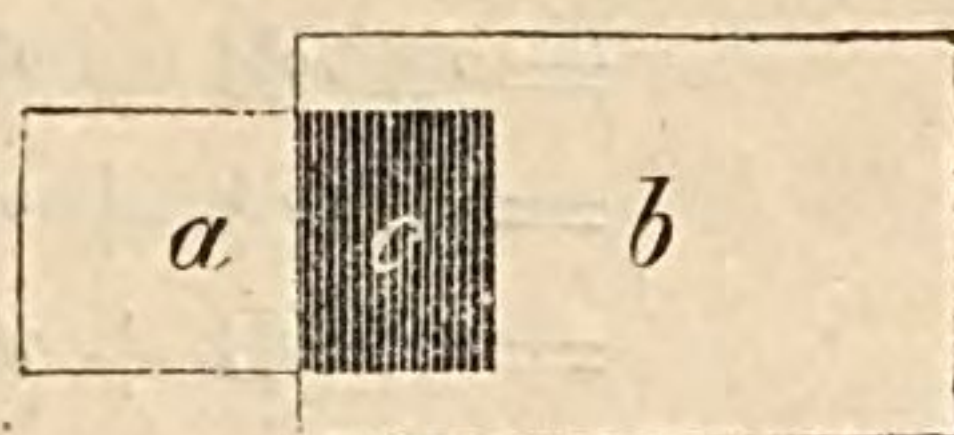
Beweis. Unmittelbar aus 36 und 30.

Veranschaulichung.  $d = a + b$

$$c = a \cdot b$$



d



$$\text{Satz. Annahme: } \circ A + \circ B = \circ B$$

$$\text{Folgerung: } \circ A \cdot \circ B = \circ A$$

Wenn die Summe zweier Gebiete dem einen Gebiete gleich ist, so ist das Zeug oder Produkt der beiden Gebiete dem andern Gebiete gleich.

Beweis. Nach der Annahme ist

$$\begin{aligned} \circ A \cdot \circ B &= \circ A \cdot (\circ A + \circ B) \\ &= \circ A \cdot \circ A + \circ A \cdot \circ B \quad (\text{nach 35}) \\ &= \circ A + \circ A \cdot \circ B \quad (\text{nach 36}) \\ &= \circ A \quad (\text{nach 38}) \end{aligned}$$

$$\text{Satz. } \circ A + 1 = 1$$

$$\circ A + 0 = \circ A$$

$$\text{Annahme: } \circ A \cdot \circ B = \circ B$$

39.

$$\text{Folgerung: } \circ A + \circ B = \circ A$$

Wenn das Zeug oder Produkt zweier Gebiete dem einen Gebiete gleich ist, so ist die Summe der beiden Gebiete dem andern Gebiete gleich.

Beweis. Nach der Annahme ist

$$\begin{aligned} \circ A + \circ B &= \circ A + \circ A \cdot \circ B \\ &= \circ A \cdot \circ A + \circ A \cdot \circ B \quad (\text{nach 36}) \\ &= \circ A \cdot (\circ A + \circ B) \quad (\text{nach 35}) \\ &= \circ A \quad (\text{nach 38}) \end{aligned}$$

$$\circ A \cdot 0 = 0$$

40.

$$\circ A \times 1 = \circ A$$

Eins giebt zu jedem Gebiete gefügt eins, mit jedem Gebiete gewebt oder multipliziert daselbe Gebiet.



Null giebt mit jedem Gebiete gewebt Null, zu jedem Gebiete gefügt, daselbe Gebiet.

Beweis. Die Sätze  ${}^{\circ}A + 0 = {}^{\circ}A$ ,  ${}^{\circ}A \times 1 = {}^{\circ}A$  und  ${}^{\circ}A \times 0 = 0$  gelten schon aus der Größenlehre für jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, also auch für Gebiete. Für die Gebiete ist aber ferner

$$1 = 1 (1 + 1 \times {}^{\circ}A) \quad (\text{nach 38})$$

$$= 1 + {}^{\circ}A \quad \text{da } 1 \times {}^{\circ}A = {}^{\circ}A \text{ ist.}$$

41. Satz. Annahme:  ${}^{\circ}A + {}^{\circ}C = {}^{\circ}B + {}^{\circ}C$  und auch  ${}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}C = {}^{\circ}B \cdot {}^{\circ}C$   
Folgerung:  ${}^{\circ}A = {}^{\circ}B$

Zwei Gebiete, welche zu einem dritten Gebiete gefügt, gleiche Summen, und mit einem dritten Gebiete gewebt, gleiche Zeuge oder Produkte geben, sind einander gleich.

Beweis.  ${}^{\circ}A = {}^{\circ}A ({}^{\circ}A + {}^{\circ}C) \quad (\text{nach 38})$   
 $= {}^{\circ}A ({}^{\circ}B + {}^{\circ}C) \quad (\text{nach Annahme})$   
 $= {}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}B + {}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}C \quad (\text{nach 35})$   
 $= {}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}B + {}^{\circ}B \cdot {}^{\circ}C \quad (\text{nach Annahme})$   
 $= {}^{\circ}B ({}^{\circ}A + {}^{\circ}C) \quad (\text{nach 35})$   
 $= {}^{\circ}B ({}^{\circ}B + {}^{\circ}C) \quad (\text{nach Annahme})$   
 $= {}^{\circ}B \quad (\text{nach 38})$

42. Satz. Annahme:  ${}^{\circ}A + {}^{\circ}B = 0$ .  
Folgerung:  ${}^{\circ}A = 0, {}^{\circ}B = 0$ .

Wenn die Summe zweier Gebiete Null ist, so ist jedes der beiden Gebiete Null.

Beweis.  ${}^{\circ}A = {}^{\circ}A + 0$   
 $\quad \quad \quad (\text{nach 40})$   
 $= {}^{\circ}A + ({}^{\circ}A + {}^{\circ}B)$   
 $\quad \quad \quad (\text{nach Annahme})$   
 $= ({}^{\circ}A + {}^{\circ}A) + {}^{\circ}B$   
 $\quad \quad \quad (\text{nach 35})$   
 $= {}^{\circ}A + {}^{\circ}B$   
 $\quad \quad \quad (\text{nach 36})$   
 $= 0$   
 $\quad \quad \quad (\text{nach Annahme})$

Annahme:  ${}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}B = 1$ .

Folgerung:  ${}^{\circ}A = 1, {}^{\circ}B = 1$ .

Wenn das Zeug (Produkt) zweier Gebiete Eins ist, so ist jedes der beiden Gebiete Eins.

Beweis.  ${}^{\circ}A = {}^{\circ}A \cdot 1$   
 $\quad \quad \quad (\text{nach 40})$   
 $= {}^{\circ}A ({}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}B)$   
 $\quad \quad \quad (\text{nach Annahme})$   
 $= ({}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}A) \cdot {}^{\circ}B$   
 $\quad \quad \quad (\text{nach 35})$   
 $= {}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}B$   
 $\quad \quad \quad (\text{nach 36})$   
 $= 1$   
 $\quad \quad \quad (\text{nach Annahme})$

Für die Gebiete der Ausdehnungslehre giebt es demnach kein Abziehen oder Subtrahiren und kein Teilen oder Dividiren, und giebt es kein negatives Gebiet und keinen Teiler oder Divisor. Denn wollte man  ${}^{\circ}A - {}^{\circ}A = 0$  setzen,

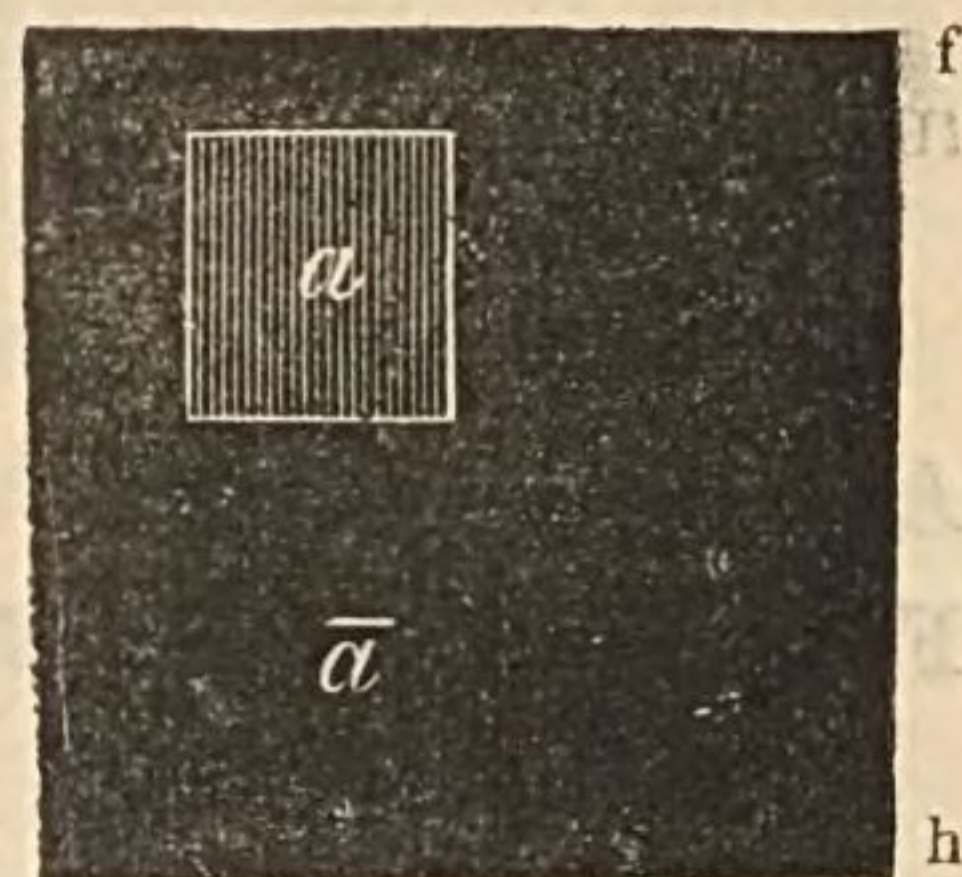


so wäre  ${}^{\circ}A + (-{}^{\circ}A) = 0$ , also nach 42 auch  ${}^{\circ}A = 0$ , und wollte man  $\frac{{}^{\circ}A}{{}^{\circ}A} = 1$  setzen,

so wäre  ${}^{\circ}A \cdot \frac{1}{{}^{\circ}A} = 1$ , also nach 42 auch  ${}^{\circ}A = 1$ .

**Erklärung.** Das Nichtgebiet eines Gebietes  ${}^{\circ}A$  wird das Gebiet  $\bar{A}$  (gelesen Gebiet Nicht A) genannt, welches alle Einheiten enthält, welche in  ${}^{\circ}A$  nicht enthalten sind, dagegen keine der Einheiten enthält, welche in  ${}^{\circ}A$  enthalten sind. Das Gebiet  ${}^{\circ}A$  heisst dem Nichtgebiete gegenüber das Selbstgebiet. Das Nicht von  ${}^{\circ}A + {}^{\circ}B$  wird durch  $\overline{{}^{\circ}A + {}^{\circ}B}$ , das Nicht von  ${}^{\circ}A \times {}^{\circ}B$  wird durch  $\overline{{}^{\circ}A \times {}^{\circ}B}$  bezeichnet.

Um das Nicht anschaulich zu machen, muss man die Betrachtung auf ein gewisses Gebiet efg h einschränken, dann ist dies die 1 und  $a + \bar{a} = 1$



**Satz.**  ${}^{\circ}A + \bar{A} = 1$

Die Summe oder das verbindende Gebiet jedes Gebietes und seines Nichtes ist Eins.

${}^{\circ}A \cdot \bar{A} = 0$

Das Zeug (Produkt) oder das gemeinsame Gebiet jedes Gebietes und seines Nichtes ist Null.

44.

**Beweis.** 1. Es ist  ${}^{\circ}A \cdot \bar{A} = 0$  unmittelbar aus 33, da  ${}^{\circ}A$  und  $\bar{A}$  gar keine Einheit gemeinsam haben.

2. Es ist  ${}^{\circ}A + \bar{A} = ({}^{\circ}A + \bar{A}) \cdot 1$  (nach 40). Das Zeug oder Produkt zweier Gebiete ist aber nach 30 das beiden Gebieten gemeinsame Gebiet, mithin sind sämtliche Einheiten, welche in  ${}^{\circ}A + \bar{A}$  enthalten sind, auch in 1 enthalten. Andererseits sind alle Einheiten, welche in 1 enthalten sind, auch in  ${}^{\circ}A + \bar{A}$  enthalten, denn nach 43 sind alle Einheiten, welche nicht in  ${}^{\circ}A$  enthalten sind, in  $\bar{A}$  enthalten, mithin sind in  ${}^{\circ}A + \bar{A}$  alle Einheiten, welche es überhaupt giebt, also auch jede Einheit, welche in 1 enthalten ist.

**Satz.** Alle Nichtgebiete desselben Gebietes sind einander gleich, oder für jedes Gebiet giebt es nur ein Nichtgebiet desselben.

45.

**Beweis.** Es seien  $\bar{A}$  und  $\bar{A}_1$  zwei Nichte desselben Gebietes, so ist  ${}^{\circ}A + \bar{A} = 1 = {}^{\circ}A + \bar{A}_1$  und  ${}^{\circ}A \cdot \bar{A} = 0 = {}^{\circ}A \cdot \bar{A}_1$  (nach 44)  
mithin  $\bar{A} = \bar{A}_1$  (nach 41)

**Satz.**  $\bar{\bar{A}} = {}^{\circ}A$

46.

Das Nicht des Nichtes eines Gebietes ist wieder das erste Gebiet selbst.

**Beweis.** Es ist  $\bar{\bar{A}} + \bar{A} = 1 = \bar{A} + {}^{\circ}A$  und  $\bar{\bar{A}} \cdot \bar{A} = 0 = {}^{\circ}A \cdot \bar{A}$  (nach 43)

also ist  $\bar{\bar{A}} = {}^{\circ}A$  (nach 41).



|     |                                                    |                                                    |
|-----|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 47. | <b>Satz.</b> $\bar{1} = 0$                         | $\bar{0} = 1$                                      |
|     | Das Nicht der Eins ist die Null.                   | Das Nicht der Null ist die Eins.                   |
|     | Beweis. $1 + \bar{1} = 1 = 1 + 0$<br>(nach 44, 40) | Beweis. $0 + \bar{0} = 1 = 0 + 1$<br>(nach 44, 40) |
|     | $1 \cdot \bar{1} = 0 = 1 \cdot 0$<br>(nach 44, 40) | $0 \cdot \bar{0} = 0 = 0 \cdot 1$<br>(nach 44, 40) |
|     | mithin $\bar{1} = 0$ (nach 41)                     | mithin $\bar{0} = 1$ (nach 41)                     |

|     |                                                                                                                |                                                                                                                 |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 48. | <b>Satz.</b>                                                                                                   |                                                                                                                 |
|     | Annahme: ${}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}\bar{B} = 0, {}^{\circ}\bar{A} \cdot {}^{\circ}B = 0$                    | Annahme: $({}^{\circ}A + {}^{\circ}\bar{B}) = 1,$                                                               |
|     | Folgerung: ${}^{\circ}A = {}^{\circ}B$                                                                         | $({}^{\circ}\bar{A} + {}^{\circ}B) = 1$                                                                         |
|     | Wenn bei zwei Gebieten das Zeug je des einen mit dem Nichte des andern Null ist, so sind beide Gebiete gleich. | Folgerung: ${}^{\circ}A = {}^{\circ}B$                                                                          |
|     | Beweis. Nach 40 ist                                                                                            | Wenn bei zwei Gebieten die Summe je des einen mit dem Nichte des andern Eins ist, so sind beide Gebiete gleich. |
|     | ${}^{\circ}A = {}^{\circ}A \times 1$                                                                           | Beweis. Nach 40 ist                                                                                             |
|     | $= {}^{\circ}A ({}^{\circ}B + {}^{\circ}\bar{B})$ (nach 44)                                                    | ${}^{\circ}A = {}^{\circ}A \times 1$                                                                            |
|     | $= {}^{\circ}A {}^{\circ}B + {}^{\circ}A {}^{\circ}\bar{B}$ (nach 35)                                          | $= {}^{\circ}A ({}^{\circ}\bar{A} + {}^{\circ}B)$ (Annahme)                                                     |
|     | $= {}^{\circ}A {}^{\circ}B$                                                                                    | $= {}^{\circ}A {}^{\circ}\bar{A} + {}^{\circ}A {}^{\circ}B$ (nach 35)                                           |
|     | (nach Annahme)                                                                                                 | $= {}^{\circ}A {}^{\circ}B$ (nach 44)                                                                           |
|     | $= {}^{\circ}A {}^{\circ}B + {}^{\circ}\bar{A} {}^{\circ}B$                                                    | $= {}^{\circ}A {}^{\circ}B + {}^{\circ}\bar{B} {}^{\circ}B$ (nach 44)                                           |
|     | (nach Annahme)                                                                                                 | $= ({}^{\circ}A + {}^{\circ}\bar{B}) {}^{\circ}B$ (nach 35)                                                     |
|     | $= ({}^{\circ}A + {}^{\circ}\bar{A}) {}^{\circ}B$ (nach 35)                                                    | $= 1 \times {}^{\circ}B = {}^{\circ}B$                                                                          |
|     | $= {}^{\circ}B$ (nach 44)                                                                                      | (nach Annahme)                                                                                                  |

|     |                                                                                                                                                    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 49. | <b>Satz.</b> ${}^{\circ}A + {}^{\circ}B = {}^{\circ}A {}^{\circ}B + {}^{\circ}A {}^{\circ}\bar{B} + {}^{\circ}\bar{A} {}^{\circ}B$                 |
|     | Die Summe zweier Gebiete ist gleich der Summe aus dem Zeuge der beiden Gebiete und den beiden Zeugen des einen Gebietes mit dem Nichte des andern. |
|     | Beweis. ${}^{\circ}A + {}^{\circ}B = {}^{\circ}A \cdot 1 + 1 \cdot {}^{\circ}B$ (nach 40)                                                          |
|     | $= {}^{\circ}A ({}^{\circ}B + {}^{\circ}\bar{B}) + ({}^{\circ}A + {}^{\circ}\bar{A}) {}^{\circ}B$ (nach 44)                                        |
|     | $= {}^{\circ}A {}^{\circ}B + {}^{\circ}A {}^{\circ}\bar{B} + {}^{\circ}A {}^{\circ}B + {}^{\circ}\bar{A} {}^{\circ}B$ (nach 35)                    |
|     | $= {}^{\circ}A {}^{\circ}B + {}^{\circ}A {}^{\circ}\bar{B} + {}^{\circ}\bar{A} {}^{\circ}B$ (nach 36)                                              |

|     |                                                                                                               |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 50. | <b>Satz.</b> ${}^{\circ}A + {}^{\circ}B + {}^{\circ}\bar{A} \cdot {}^{\circ}\bar{B} = 1.$                     |
|     | Bei je zwei Gebieten ist die Summe aus den beiden Gebieten und dem Zeuge (Produkte) ihrer Nichte gleich Eins. |



$$\begin{aligned}
 \text{Beweis. } 1 &= 1 \cdot 1 && (\text{nach } 40) \\
 &= ({}^{\circ}A + {}^{\circ}\bar{A}) ({}^{\circ}B + {}^{\circ}\bar{B}) && (\text{nach } 44) \\
 &= {}^{\circ}A {}^{\circ}B + {}^{\circ}A {}^{\circ}\bar{B} + {}^{\circ}\bar{A} {}^{\circ}B + {}^{\circ}\bar{A} {}^{\circ}\bar{B} && (\text{nach } 35) \\
 &= {}^{\circ}A + {}^{\circ}B + {}^{\circ}\bar{A} {}^{\circ}\bar{B} && (\text{nach } 49)
 \end{aligned}$$

$$\text{Satz. } [{}^{\circ}A + {}^{\circ}B) = {}^{\circ}\bar{A} \cdot {}^{\circ}\bar{B}$$

Das Nicht einer Summe oder des verbindenden Gebietes ist gleich dem Zeuge oder dem gemeinfamen Gebiete von den Nichten der Stücke.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 {}^{\circ}A + {}^{\circ}B + {}^{\circ}\bar{A} \cdot {}^{\circ}\bar{B} &= 1 \quad (\text{nach } 50) \\
 &= {}^{\circ}A + {}^{\circ}B + [{}^{\circ}A + {}^{\circ}B) \\
 &\quad (\text{nach } 44) \text{ und}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ({}^{\circ}A + {}^{\circ}B) \cdot {}^{\circ}\bar{A} \cdot {}^{\circ}\bar{B} \\
 &= {}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}\bar{A} \cdot {}^{\circ}\bar{B} + {}^{\circ}B \cdot {}^{\circ}\bar{A} \cdot {}^{\circ}\bar{B} \quad (\text{nach } 35) \\
 &= 0 \quad (\text{nach } 44) \\
 &= ({}^{\circ}A + {}^{\circ}B) [{}^{\circ}A + {}^{\circ}B) \\
 &\quad (\text{nach } 44)
 \end{aligned}$$

$$\text{mithin } {}^{\circ}\bar{A} \cdot {}^{\circ}\bar{B} = [{}^{\circ}A + {}^{\circ}B) \quad (\text{nach } 41)$$

$$[{}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}B) = {}^{\circ}\bar{A} + {}^{\circ}\bar{B}$$

51.

Das Nicht des Zeuges oder des gemeinfamen Gebietes ist gleich der Summe oder dem verbindenden Gebiete von den Nichten der Fache oder Faktoren.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 {}^{\circ}A {}^{\circ}B + \bar{A} + {}^{\circ}\bar{B} &= 1 \quad (\text{nach } 50) \\
 &= {}^{\circ}A {}^{\circ}B + [{}^{\circ}A {}^{\circ}B) \\
 &\quad (\text{nach } 44) \text{ und}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^{\circ}A {}^{\circ}B ({}^{\circ}\bar{A} + {}^{\circ}\bar{B}) \\
 &= {}^{\circ}A {}^{\circ}B {}^{\circ}\bar{A} + {}^{\circ}A {}^{\circ}B {}^{\circ}\bar{B} \quad (\text{nach } 35) \\
 &= 0 \quad (\text{nach } 44) \\
 &= {}^{\circ}A {}^{\circ}B \cdot [{}^{\circ}A {}^{\circ}B) \\
 &\quad (\text{nach } 44)
 \end{aligned}$$

$$\text{mithin } {}^{\circ}\bar{A} + {}^{\circ}\bar{B} = [{}^{\circ}A {}^{\circ}B) \quad (\text{nach } 41)$$

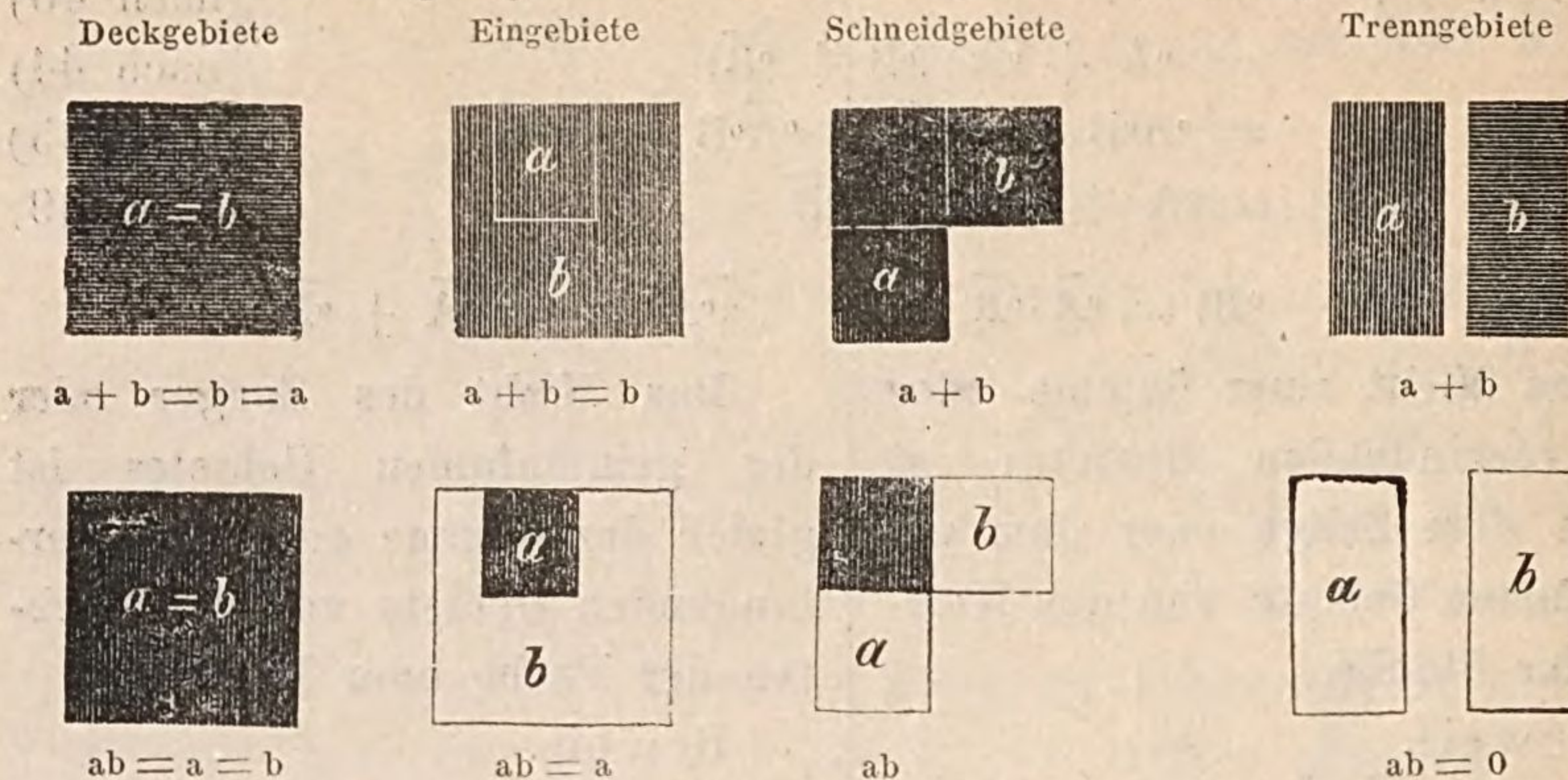
**Erklärung.** Zwei Gebiete der Ausdehnungslehre heissen

52.

- Deckgebiete oder identische Gebiete, wenn beide einander gleich sind oder wenn jede Gröse des einen Gebietes auch eine Gröse des andern ist,
- Eingebiete oder inzidente Gebiete, wenn das eine ein Stück des andern ist, oder wenn jede Gröse des Stückes auch eine Gröse der Summe ist. Die Summe heist dann auch das übergeordnete oder weitere Gebiet, das Stück das untergeordnete oder engere Gebiet,
- Schneidgebiete oder sekante Gebiete, wenn beide teils gemeinfame Grösen, teils jede eigentümliche Grösen hat. Die Gefammtheit der gemeinfamen Grösen heist das gemeinfame Gebiet, die Gefammtheit aller Grösen, welche zu den Grösen beider Gebiete hörig sind, das verbindende Gebiet,
- Trenngebiete oder disjunkte Gebiete, wenn beide Gebiete keine Gröse gemeinfam haben.



Die Anschauung ergibt sich aus der folgenden Zeichnung:



53. Satz. Die Summe oder das verbindende Gebiet zweier Deckgebiete (identischer Gebiete) ist dasselbe Gebiet, die zweier Eingebiete ist das höhere Gebiet, die zweier Schneidgebiete ist das verbindende Gebiet, die zweier Trenngebiete (disjunkter Gebiete) ist die Summe aller den beiden Gebieten angehörigen Größen.

Beweis. Unmittelbar aus 36 und 30.

Veranschaulichung siehe bei Satz 52.

54. Satz.  ${}^{\circ}A + {}^{\circ}B \geq {}^{\circ}B$

Die Summe der Gebiete ist jedem Stücke gleich oder übergeordnet.

Beweis. Unmittelbar aus 53.

Zur Veranschaulichung des Satzes kann die Zeichnung zu 52 für Deckgebiete und Untergebiete dienen.

55. Satz.  $1 \geq {}^{\circ}A$

Die Eins ist das höchste Gebiet, welchem alle Gebiete untergeordnet sind.

Beweis. Nach 40 ist  ${}^{\circ}A + 1 = 1$  und  ${}^{\circ}A \cdot 1 = {}^{\circ}A$ , also ist nach 53 die 1 höher als  ${}^{\circ}A$ , was immer auch  ${}^{\circ}A$  fein möge.

Das Zeug (Produkt) oder das gemeinfame Gebiet zweier Deckgebiete (identischer Gebiete) ist dasselbe Gebiet, das zweier Eingebiete ist das niedere Gebiet, das zweier Schneidgebiete ist das gemeinfame Gebiet, das zweier Trenngebiete (disjunkter Gebiete) ist Null.

Beweis. Unmittelbar aus 33, 36 und 30.

${}^{\circ}A \cdot {}^{\circ}B \leq {}^{\circ}B$

Das Zeug (das Produkt) der Gebiete ist jedem Fache oder Faktor gleich oder untergeordnet.

Beweis. Unmittelbar aus 53.

$0 \leq {}^{\circ}A$

Die Null ist das niedrigste Gebiet, welches allen Gebieten untergeordnet ist.

Beweis. Nach 40 ist  ${}^{\circ}A + 0 = {}^{\circ}A$  und  ${}^{\circ}A \times 0 = 0$ , also ist nach 53 die 0 niedriger als  ${}^{\circ}A$ , was immer auch  ${}^{\circ}A$  fein möge.



Satz.  $(^{\circ}A + ^{\circ}B = ^{\circ}B) = (^{\circ}A \leq ^{\circ}B)$

Ein Gebiet, welches zu einem andern zugefügt, den Wert des-  
selben nicht ändert, ist diesem  
deckend oder untergeordnet und

Man kann zu jedem Gebiete  
ohne Aenderung seines Wertes  
das Deckgebiet oder das unter-  
geordnete Gebiet zufügen (ad-  
diren).

Beweis. Unmittelbar aus 54.

Satz.  $(^{\circ}A^{\circ}B = 0) = (^{\circ}B \leq ^{\circ}A)$

und  $(^{\circ}A^{\circ}B = 0) = (^{\circ}A \leq ^{\circ}\bar{B})$

Jedes Gebiet ist dem Nichte  
seines Trenngebietes gleich oder  
untergeordnet und

Wenn ein Gebiet dem Nichte  
eines andern gleich oder unter-  
geordnet ist, so ist es von dem-  
selben getrennt oder disjunkt.

Beweis. 1. Wenn  $^{\circ}A^{\circ}B = 0$   
(Annahme), so ist

$$^{\circ}B = ^{\circ}B \cdot 1 \quad (\text{nach } 40)$$

$$= ^{\circ}B(^{\circ}A + ^{\circ}\bar{A}) \quad (\text{nach } 44)$$

$$= ^{\circ}B^{\circ}A + ^{\circ}B^{\circ}\bar{A} \quad (\text{nach } 35)$$

$$= ^{\circ}B^{\circ}\bar{A} \quad (\text{nach Annahme})$$

$$\text{d. h. } ^{\circ}B \leq ^{\circ}\bar{A} \quad (\text{nach } 56)$$

2. Wenn  $^{\circ}A \leq ^{\circ}\bar{B}$ , so ist nach  
54  $^{\circ}\bar{B} = ^{\circ}A + ^{\circ}\bar{B}$ , also

$$0 = ^{\circ}\bar{B}^{\circ}B \quad (\text{nach } 44)$$

$$= (^{\circ}A + ^{\circ}\bar{B})^{\circ}B$$

$$= ^{\circ}A^{\circ}B + ^{\circ}\bar{B}^{\circ}B \quad (\text{nach } 35)$$

$$= ^{\circ}A^{\circ}B \quad (\text{nach } 44)$$

Satz.  $(^{\circ}A < ^{\circ}B) = (^{\circ}\bar{B} < ^{\circ}\bar{A})$

Das Nicht des höhern Begriffes ist dem Nichte  
des niedern Begriffes untergeordnet.

Beweis. Unmittelbar aus 57, denn  $[^{\circ}A < ^{\circ}B]$

$$= (^{\circ}A^{\circ}\bar{B} = 0) = (^{\circ}\bar{B} < ^{\circ}\bar{A})$$

$(^{\circ}A^{\circ}B = ^{\circ}A) = (^{\circ}A \leq ^{\circ}B)$  56.

Ein Gebiet, welches mit einem  
andern gewebt (multipliziert) den  
Wert desfelben nicht ändert, ist die-  
sem deckend oder übergeordnet und

Man kann jedes Gebiet ohne  
Aenderung seines Wertes mit  
einem deckenden oder ihm über-  
geordneten Gebiete verweben  
(multiplizieren).

Beweis. Unmittelbar aus 54.

$(^{\circ}\bar{A}^{\circ}B = 0) = (^{\circ}B \leq ^{\circ}A)$  57.

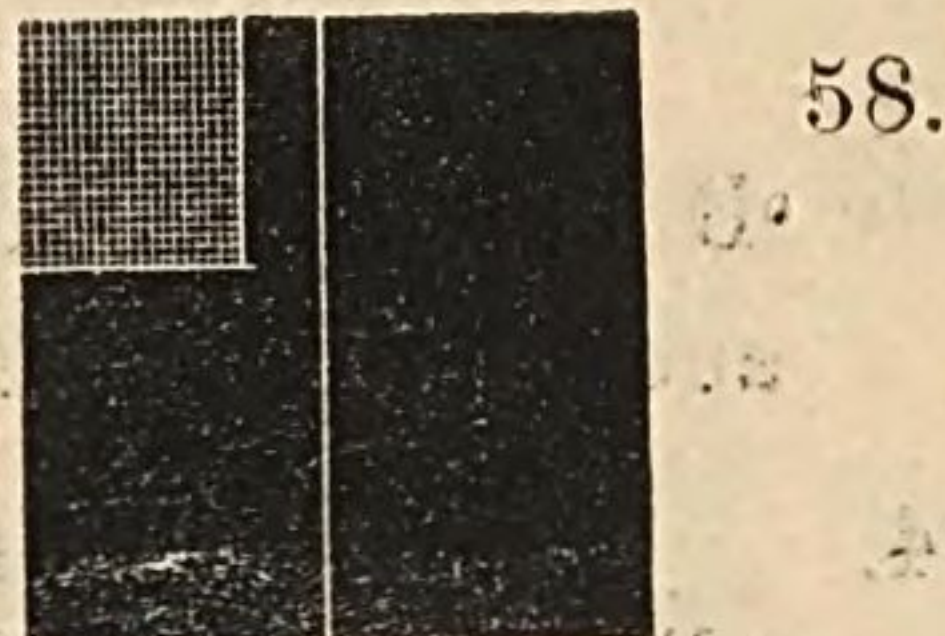
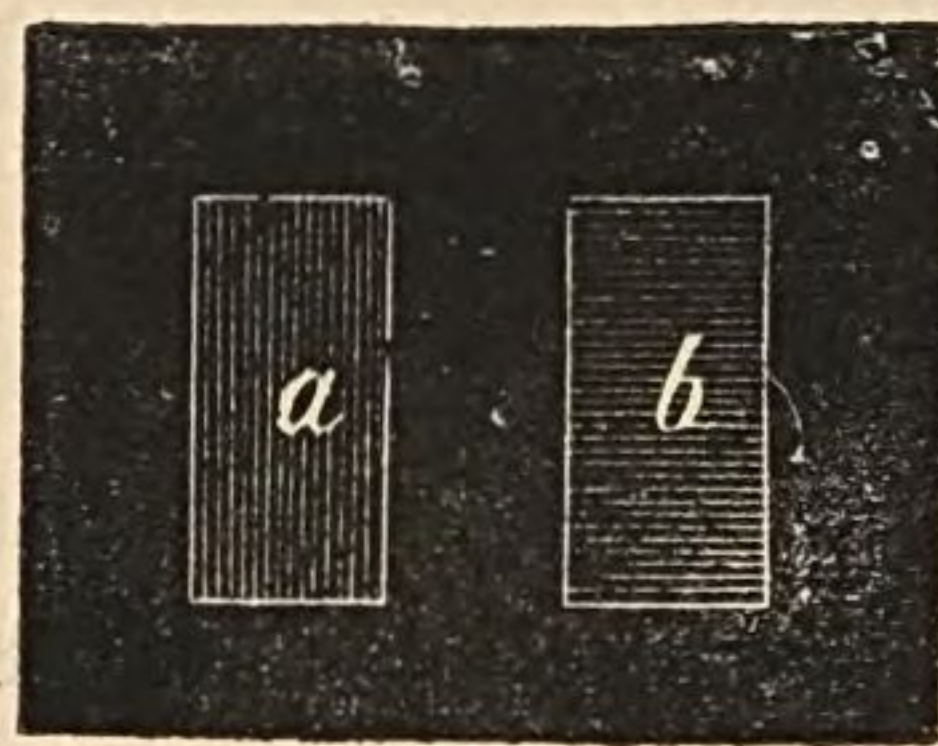
$(^{\circ}\bar{A}^{\circ}B = 0) = (^{\circ}\bar{A} \leq ^{\circ}\bar{B})$

Jedes Gebiet ist dem Nichte  
seines gleich oder übergeordneten  
Gebietes getrennt oder disjunkt und

Wenn ein Gebiet einem an-  
dern gleich oder untergeordnet ist,  
so ist es dem Nichte desfelben ge-  
trennt oder disjunkt.

Beweis. Unmittelbar aus 57  
erste Seite.

Zur Veranschaulichung des  
Satzes dient folgende Zeichnung:



58.



59. Satz.  $(^{\circ}A + ^{\circ}B = ^{\circ}B) (^{\circ}A^{\circ}B = ^{\circ}B) = (^{\circ}A = ^{\circ}B)$

Ein Gebiet, welches zu einem andern Gebiete zugefügt und auch mit ihm verwebt (multipliziert) dies Gebiet nicht ändert, ist diesem Gebiete deckend oder identisch.

Beweis. Da  $^{\circ}A + ^{\circ}B = ^{\circ}B$  ist, so ist  $^{\circ}A = ^{\circ}A^{\circ}B$  nach 39, also ist  $^{\circ}A = ^{\circ}A^{\circ}B = ^{\circ}B$  nach der Annahme.

60. Satz.  $(^{\circ}A < ^{\circ}B) (^{\circ}B < ^{\circ}A) = (^{\circ}A = ^{\circ}B)$

Wenn von zwei Gebieten das erste dem zweiten und zugleich das zweite dem ersten untergeordnet ist, so sind beide Gebiete deckend oder identisch.

Beweis. Wenn  $^{\circ}A < ^{\circ}B$ , so ist nach 56 auch  $^{\circ}A + ^{\circ}B = ^{\circ}B$  und wenn  $^{\circ}B < ^{\circ}A$ , so ist nach 56 auch  $^{\circ}A + ^{\circ}B = ^{\circ}A$ , mithin ist  $^{\circ}A = ^{\circ}A + ^{\circ}B = ^{\circ}B$

61. Satz.  $(^{\circ}A < ^{\circ}B) \cdot (^{\circ}\bar{A} < ^{\circ}\bar{B}) = (^{\circ}A = ^{\circ}B)$

Wenn das Nicht des niedern Gebietes dem des höhern Gebietes untergeordnet ist, so sind beide Gebiete deckend oder identisch.

Beweis. Nach 58 ist da  $^{\circ}A < ^{\circ}B$  auch  $^{\circ}\bar{B} < ^{\circ}\bar{A}$ , und da auch  $^{\circ}\bar{A} < ^{\circ}\bar{B}$ , so ist nach 60 auch  $^{\circ}A = ^{\circ}B$

62. Satz. Für deckende Gebiete und für Eingebiete finden die folgenden acht Gleichungen statt, und wenn eine dieser Gleichungen stattfindet, sind die Gebiete deckende oder Eingebiete.

$$\begin{array}{llll} 1. ^{\circ}A \leq ^{\circ}B & 3. ^{\circ}A + ^{\circ}B = ^{\circ}B & 5. ^{\circ}A^{\circ}B = ^{\circ}A & 7. ^{\circ}A^{\circ}\bar{B} = 0 \\ 2. ^{\circ}\bar{B} \leq ^{\circ}\bar{A} & 4. ^{\circ}\bar{A} + ^{\circ}\bar{B} = ^{\circ}\bar{A} & 6. ^{\circ}\bar{A}^{\circ}\bar{B} = ^{\circ}\bar{B} & 8. ^{\circ}\bar{A} + ^{\circ}B = 1 \end{array}$$

Beweis. Unmittelbar 1 nach 53; 2 nach 58; 3, 4, 5 und 6 nach 56; 7 nach 57. Es bleibt also nur für 8 der Beweis zu führen; es ist aber

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + ^{\circ}B && \text{(nach 40)} \\ &= ^{\circ}\bar{A} + ^{\circ}A + ^{\circ}B && \text{(nach 44)} \\ &= ^{\circ}\bar{A} + ^{\circ}B && \text{(nach 56)} \end{aligned}$$

63. Satz. Für Trenngebiete (disjunkte Gebiete) finden die folgenden acht Gleichungen statt und wenn eine dieser Gleichungen stattfindet, so sind die Gebiete getrennt oder disjunkt.

$$\begin{array}{llll} 1. ^{\circ}A \leq ^{\circ}\bar{B} & 3. ^{\circ}A + ^{\circ}\bar{B} = ^{\circ}\bar{B} & 5. ^{\circ}A \cdot ^{\circ}\bar{B} = ^{\circ}A & 7. ^{\circ}A^{\circ}B = 0 \\ 2. ^{\circ}B \leq ^{\circ}\bar{A} & 4. ^{\circ}\bar{A} + ^{\circ}B = ^{\circ}\bar{A} & 6. ^{\circ}\bar{A} \cdot ^{\circ}B = ^{\circ}B & 8. ^{\circ}\bar{A} + ^{\circ}\bar{B} = 1 \end{array}$$

Beweis. Unmittelbar aus 62, indem man  $^{\circ}B$  in  $^{\circ}\bar{B}$  und  $^{\circ}\bar{B}$  in  $^{\circ}B$  umwandelt, da wenn  $^{\circ}A$  und  $^{\circ}B$  disjunkt, d. h. nach 53  $^{\circ}A^{\circ}B = 0$  auch nach 57  $^{\circ}A$  dem  $^{\circ}\bar{B}$  untergeordnet ist.

64. Erklärung. Das Hauptgebiet  $^{\circ}H$  heist das Gebiet, zu welchem alle der Betrachtung unterworfenen Größen hörig sind. Alle Größen



welche ausserhalb des Gebietes liegen, werden für die Betrachtung gleich Null gesetzt. Alle Gebiete, welche das Hauptgebiet schneiden, werden nur soweit betrachtet, als sie in das Hauptgebiet fallen.

**Erklärung.** Die Ergänzung eines Gebietes heisst das Nicht- 65.  
gebiet jenes Gebietes, soweit die Einheiten des Nichtgebietes im Hauptgebiete enthalten sind, oder sie ist das Zeug des Nichtgebietes mit dem Hauptgebiete.

**Satz.** Die Betrachtung wird auf das Hauptgebiet  $H$  beschränkt, 66.  
indem jedes Glied der Formel mit dem Hauptgebiete  $H$  verwebt oder multipliziert wird.

**Beweis.** Da für die Gebiete nur Zufügung und Verwebung vorkommt, und für diese Rechnungen alle Klammern gelöst werden können, so erhält, wenn man alle Klammern löst, jedes Glied die Form  $\alpha \circ A$  und die ganze Formel die Form

$\sum_{1,n} \alpha_a \circ A_a = \sum_{1,m} \beta_b \circ B_b$ . Wenn man hier beide Seiten mit  $H$  verwebt, so erhält die Formel die Gestalt

$$\left( \sum_{1,n} \alpha_a \circ A_a \right) \circ H = \left( \sum_{1,m} \beta_b \circ B_b \right) \circ H, \text{ oder nach 35 und Grösenlehre 90}$$

$$\sum_{1,n} \alpha_a \circ A_a \circ H = \sum_{1,m} \beta_b \circ B_b \circ H$$

Sei nun  $\circ B_c$  ein Gebiet ausserhalb des Hauptgebietes, so ist  $\circ B_c \circ H = 0$  nach 33. Sei  $\circ B_d$  ein Gebiet, welches  $\circ H$  schneidet, so ist  $\circ B_d \circ H$  nach 30 das beiden Gebieten gemeinsame Gebiet, d. h. es wird nur soweit betrachtet, als es in das Hauptgebiet fällt. Sei endlich  $\circ B_e$  ein Gebiet innerhalb des Hauptgebietes, so ist nach 62 auch  $\circ B_e \circ H = \circ B_e$ . Aus 1 wird  $1 \circ H = \circ H$ .

**Satz.** Alle Sätze 34 bis 63 über die Gebiete bleiben bestehen, 67.  
sofern man für jedes Gebiet das Zeug des Gebietes mit dem Hauptgebiet, für 1 das Hauptgebiet und für jedes Nichtgebiet die Ergänzung zum Hauptgebiete setzt.

**Beweis.** Unmittelbar aus 66.

## 5. Die Zeuge oder Produkte von Ausdehnungsgrößen.

**Erklärung.** Das Zeug oder Produkt von  $n$  Einheiten erster 68.  
Klasse heisst eine Einheit  $n$ ter Klasse, sofern es ungleich Null ist. Jede Einheit  $n$ ter Klasse, welche wenigstens eine andere Einheit erster Klasse enthält, als jede andere Einheit  $n$ ter Klasse, ist eine von diesen freie Grösse.



Ich habe das Gebiet von  $n$  gegenseitig freien Größen erster Klasse oder von  $n$  ursprünglichen Einheiten ein Gebiet  $n$ ter Stufe genannt. Dagegen nenne ich das Zeug oder Produkt von  $n$  ursprünglichen Einheiten eine Einheit  $n$ ter Klasse, ebenso das Zeug oder Produkt von  $n$  gegenseitig freien Größen erster Klasse eine GröÙe  $n$ ter Klasse. Ich unterscheide also Stufe und Klasse und gebrauche die Stufe nur für die Gebiete, die Klasse nur für die Zeuge oder Produkte. Es ist diese Benennung der Zeuge oder Produkte aber auch geschichtlich berechtigt. In der Bindelehre oder Kombinationslehre heist ein Gebinde von  $n$  Einfachen oder Elementen  $abc \dots n$  längst ein Gebinde  $n$ ter Klasse. Es liegt kein Grund vor, von diesem geschichtlichen Gebrauche abzugehen. Die Sätze aber werden dadurch klarer. Betrachtet man z. B. die Zeuge oder Produkte von  $m$  einfachen gegenseitig freien Größen in einem Gebiete  $n$ ter Stufe, so ist es klarer von den Größen  $m$ ter Klasse in einem Gebiete  $n$ ter Stufe zu reden, als von den Größen  $m$ ter Stufe in einem Gebiete  $n$ ter Stufe.

Die gegebene Erklärung befagt, dass zwischen den verschiedenen Einheiten höherer Klasse nicht noch Bedingungsgleichungen herrschen dürfen, wodurch die eine als Vielfachensumme der andern gesetzt wird. Denn sei

$\alpha E + \beta F + \gamma G + \dots = 0$ , wo  $E, F, G \dots$  verschiedene Einheiten höherer Klasse sind, und sei wenigstens eine der Vorzahlen z. B.  $\alpha$  ungleich Null, so ist die dieser Vorzahl zugehörige Einheit  $E$  nach 14 zu den Einheiten  $F, G \dots$  hörig, also nicht frei von den Einheiten  $F, G \dots$ .

69. **Satz.** Wenn  $\alpha E + \beta F + \gamma G + \dots = 0$  wo  $E, F, G \dots$  verschiedene Einheiten höherer Klasse sind, so ist  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0, \dots$  oder eine GröÙe, welche zu den verschiedenen Einheiten höherer Klasse hörig oder welche eine Vielfachensumme dieser höheren Einheiten ist, ist dann und nur dann Null, wenn ihre sämtlichen Vorzahlen Null sind.

Beweis: Unmittelbar aus Satz 15.

70. **Satz.** In jedem Zeuge oder Produkte zweier Größen der Ausdehnungslehre kann man, statt die einzelnen Größen mit Zahlen zu vielfachen, auch das Zeug der erstern mit dem Zeuge der letztern vielfachen oder es ist

$$(\alpha a)(\beta b) = (\alpha \beta)(ab)$$

Beweis: Es ist  $(\alpha a)(\beta b) = \alpha(a\beta)b$  (nach 3<sub>1</sub>).  
 $= \alpha(\beta a)b$  (nach 4).  
 $= (\alpha \beta)(ab)$  (nach 3<sub>1</sub>).

71. **Satz.** In jedem Zeuge oder Produkte mehrerer Größen der Ausdehnungslehre kann man, statt die einzelnen Größen mit Zahlen zu vielfachen, auch das Zeug der erstern mit dem Zeuge der letztern vielfachen oder es ist

$$P(\alpha a, \beta b \dots) = (\alpha \beta \dots) P(a, b \dots)$$



**Satz.** In jedem Zeuge oder Produkte mehrerer Größen der Ausdehnungslehre kann man die Fache oder Faktoren, welche Vielfache derselben Größe sind, ohne Aenderung des Wertes vertauschen, oder es ist

$$P_{(\alpha a, \beta a \dots)} = P_{(\beta a, \alpha a \dots)}$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } P_{(\alpha a, \beta a \dots)} &= (\alpha \beta \dots) P_{(a, a \dots)} && (\text{nach 71}) \\ &= (\beta \alpha \dots) P_{(a, a \dots)} && (\text{nach Zahlenlehre 160}) \\ &= P_{(\beta a, \alpha a \dots)} && (\text{nach 71}) \end{aligned}$$

**Satz.** Ein Zeug, dessen einer Fach (Faktor) eine Vielfachenfumme ist, ist gleich einer Vielfachenfumme von entsprechenden Zeugen, welche man erhält, wenn man statt der gegebenen Vielfachenfumme die Stücke setzt oder

$$P_{(\alpha a + \beta b + \dots)} c = \alpha P_{ac} + \beta P_{bc} + \dots$$

**Beweis.** Unmittelbar aus Größenlehre 71 und Ausdehnungslehre 71.

**Satz.** Das Zeug oder Produkt zweier Vielfachenfummen aus beliebigen Größen erhält man, indem man jede Größe der ersten mit jeder der zweiten zu einem Teilzeuge einwebt (multipliziert), jedes dieser Teilzeuge mit dem Zeuge der zu den betreffenden Größen gehörigen Vorzahlen vervielfacht, und dann sämtliche Zeuge, welche sich auf diese Weise bilden lassen, zufügt oder addiert, oder

$$(S \alpha_a a_a) \cdot (S \beta_b b_b) = S \alpha_a \beta_b (a_a b_b)$$

wo  $a_a b_b$  beliebige Größen,  $\alpha_a \beta_b$  beliebige Zahlen.

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } (S \alpha_a a_a) \cdot (S \beta_b b_b) &= S \alpha_a [a_a \cdot (S \beta_b b_b)] && (\text{nach 73}) \\ &= S \alpha_a [\beta_b (a_a b_b)] && (\text{nach 73}) \\ &= S \alpha_a \beta_b (a_a b_b) && (\text{nach 12}) \end{aligned}$$

**Satz.** Der Satz 74 gilt auch für beliebig viele Fache oder Faktoren, d. h.

$$(S \alpha_a a_a) \cdot (S \beta_b b_b) \cdot (S \gamma_c c_c) \dots = S (\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots) (a_a b_b c_c \dots)$$

wo  $a_a, b_b, c_c \dots$  beliebige Größen und  $\alpha_a, \beta_b, \gamma_c \dots$  beliebige Zahlen.

**Beweis:** Wenn der Satz für irgend eine Anzahl  $m$  von Fachen oder Faktoren gilt (Annahme), so gilt er auch für  $m + 1$  Fache.

Es sei nach der Annahme

$$(S \alpha_a a_a) \cdot (S \beta_b b_b) \dots (S \mu_m m_m) = S (\alpha_a \beta_b \dots \mu_m) (a_a b_b \dots m_m) \quad \text{so ist}$$

$$\begin{aligned} (S \alpha_a a_a) \cdot (S \beta_b b_b) \dots (S \mu_m m_m) \cdot (S \nu_n n_n) &= [S (\alpha_a \beta_b \dots \mu_m) (a_a b_b \dots m_m)] (S \nu_n n_n) && (\text{nach Annahme}) \\ &= S (\alpha_a \beta_b \dots \mu_m \nu_n) (a_a b_b \dots m_m n_n) && (\text{nach 74}) \end{aligned}$$



Nun gilt der Satz 75 nach Satz 74 für zwei Fache oder Faktoren mithin gilt er fortschreitend auch für beliebig viele.

76. **Satz.** Das Zeug oder Produkt von  $n$  Vielfachensummen von Einheiten erster Klasse ist eine Vielfachensumme von Einheiten  $n$ ter Klasse, foweit die Zeuge der  $n$  Einheiten erster Klasse ungleich Null bleiben.

Beweis: Unmittelbar aus 75.

Die in Satz 68 bis 75 entwickelten Gesetze sind die allgemeinen Gesetze, welche in der Ausdehnungslehre für alle Arten von Zeugen oder Produkten gelten. Die eigentümlichen Gesetze für die einzelnen Arten der Zeuge oder Produkte von Größen gehen aus den Bedingungsgleichungen hervor, welche für die Zeuge (Produkte) der Größen aufgestellt werden. Die Zahlgrößen der Ausdehnungslehre unterliegen den gewöhnlichen Gesetzen der Zahlenlehre; es kommt demnach nur noch darauf an, die Bedingungsgleichungen für die Zeuge der Einheiten aufzustellen.

Wir haben bereits in der Einleitung zur Ausdehnungslehre bei der Idee der Ausdehnungslehre die Arten der Webung oder Multiplikation besprochen, welche bei der Ausdehnungslehre in Betracht kommen. Wir sahen dort, dass für die Ausdehnungslehre, als niederer Zweig der Ausenlehre oder Synthesis, nur die Flachung, für welche  $e_a e_a = 0$  und  $e_a e_b = -e_b e_a$  ist, und die innere Webung, für welche  $e_a e_b = 0$  und  $e_a e_a \geq 0$  ist, in Betracht kommen, dass aber die letztere sich leicht auf die Flachung zurückführen lässt. Dass demnach für die Ausdehnungslehre nur die Flachung als eigentümliche Art der Webung verbleibt.

Für die Erweiterungslehre oder für den höhern Zweig der Ausenlehre oder der Synthesis, lernten wir dort noch die Flechtung kennen, für welche sowohl  $e_a e_a \geq 0$ , als auch  $e_a e_b \geq 0$  ist. Wir könnten hienach sofort zur Flachung übergehen; indessen ziehe ich es doch vor, im Texte noch einen befondern Weg einzuschlagen und die Zeuge oder Produkte der Ausdehnungslehre den Zeugen oder Produkten der Bindelehre, wie der Logik gegenüber zu stellen, und hoffe ich dadurch noch mehr Klarheit in die Sache zu bringen.

In der Ausdehnungslehre kann man, wie in dem innern Denken zwei Ordnungen der Webung oder Multiplikation unterscheiden, nämlich

- 1 Die innere Webung, den Begriffen der Bestimmungslehre oder Logik entsprechend, für welche das Zeug oder Produkt zweier verschiedener Einheiten gleich Null gesetzt wird.  $e_a \cdot e_b = 0$ .
2. Die äusere Webung, den Gebinden der Bindelehre oder Kombinationslehre entsprechend, für welche das Zeug oder Produkt zweier verschiedener Einheiten ungleich Null gesetzt wird.  $e_a e_b \geq 0$ .

77. **Erklärung.** Die innere Webung oder die innere Multiplikation heist in der Ausdehnungslehre diejenige Art der Webung, für welche das Zeug oder Produkt zweier verschiedener Einheiten Null, das Zeug oder Produkt zweier gleicher Einheiten eins ist.

$$e_a \cdot e_b = 0 \quad e_a \cdot e_a = 1.$$



Von der innern Webung giebt es nur eine Art. Da  $e_a \cdot e_b = 0$ , so muss  $e_a \cdot e_a \geq 0$  sein, denn setzen wir hier auch  $e_a \cdot e_a = 0$ , so werden sämtliche Größen Null, d. h. es verschwindet die ganze Webung. Das Zeug  $e_a \cdot e_a$  muss also ungleich Null sein. Soll nun aber diese Bedingung eine allgemeine sein, so dass  $e_a \cdot e_a \cdots e_a \geq 0$  ist und will man nicht für jedes dieser Zeuge einen andern Wert einführen, so ist es das Einfachste, wir setzen  $e_a \cdot e_a \cdots e_a = e_a \cdot e_a$ . Soll nun auch gleichzeitig  $e_a \cdot \frac{1}{e_a} = 1$  gelten, so folgt allgemein für jedes beliebige  $a$

$$e_a \cdot e_a = e_a \cdot e_a \cdot 1 = e_a \cdot e_a \left( e_a \cdot \frac{1}{e_a} \right) = e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot 1 \cdot \frac{1}{e_a} \quad (\text{nach 4})$$

$$= e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot \left( e_a \cdot \frac{1}{e_a} \right) \cdot \frac{1}{e_a} = e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot \frac{1}{e_a} \cdot \frac{1}{e_a} \quad (\text{nach 4})$$

$$= e_a \cdot e_a \cdot \frac{1}{e_a} \cdot \frac{1}{e_a} \quad \text{da } e_a \cdot e_a \cdot e_a \cdot e_a = e_a \cdot e_a$$

$$= e_a \cdot \left( e_a \cdot \frac{1}{e_a} \right) \cdot \frac{1}{e_a} = e_a \cdot 1 \cdot \frac{1}{e_a}$$

$$= e_a \cdot \frac{1}{e_a} = 1.$$

d. h. es werden dann alle Zeuge  $e_a \cdot e_a = 1$  für beliebiges  $a$ . Man kann also alle Zeuge oder Produkte zweier gleicher Einheiten gleich eins setzen und ist für innere Webung allgemein:

$$e_a \cdot e_a = e_b \cdot e_b = 1 \quad e_a \cdot e_b = 0.$$

Wir könnten nun zunächst die Gesetze für die innere Webung entwickeln; aber, wie sich im Folgenden zeigen wird, gewinnen wir diese Gesetze bequemer durch Anwendung der äusern Webung und können demnach sofort zur äusern Webung übergehen.

**Erklärung.** Die äusere Webung oder Multiplikation 78. heist in der Ausdehnungslehre jede Art der Webung, für welche das Zeug oder Produkt zweier oder mehrer verschiedener Einheiten ungleich Null ist oder  $e_a \cdot e_b \geq 0$   $e_a \cdot e_b \cdot e_c \cdots \geq 0$ .

In der Bindelehre oder Kombinationslehre werden wir vier Arten von Zeugen oder Produkten kennen lernen, für welche sämtlich die Bedingungsgleichung  $e_a \cdot e_b \geq 0$  gilt, nämlich

1. die Geschiede (Komplexionen) oder die Zeuge, für welche Vertauschung zweier Einheiten gilt,
2. die Geänder (Variationen) oder die Zeuge, für welche diese Vertauschung nicht gilt,

und in jeder dieser Gattungen zwei Arten, nämlich

- a) die Vollbinde (Kombinationen mit Wiederholung) oder die Zeuge, in denen das Zeug zweier gleichen Einheiten ungleich Null ist und
- b) die Ausbinde (Kombinationen ohne Wiederholung) oder die Zeuge, in denen das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist.

Wir erhalten also in der Bindelehre folgende vier Arten von Zeugen oder Produkten:

Die Vollgeschiede (Komplexionen mit Wiederholung):  $e_a \cdot e_a \geq 0$ ;  $e_a \cdot e_b = e_b \cdot e_a$

Die Ausgeschiede (Komplexionen ohne Wiederholung):  $e_a \cdot e_a = 0$ ;  $e_a \cdot e_b = e_b \cdot e_a$



Die Vollgeänder (Variationen mit Wiederholung):  $e_a \cdot e_a \geq 0$ ;  $e_a \cdot e_b \geq e_b \cdot e_a$   
 Die Ausgeänder (Variationen ohne Wiederholung):  $e_a \cdot e_a = 0$ ;  $e_a \cdot e_b \geq e_b \cdot e_a$

Verfuchen wir nun diese vier Arten der Zeuge oder Produkte in die Ausdehnungslehre einzuführen, so ergeben sich die folgenden Betrachtungen:

Für die erste Art der Webung, welche den Vollgeschieden (Komplexionen mit Wiederholung) entspricht, für welche also Vertauschung zweier Einheiten gilt, und für welche zugleich das Zeug zweier gleichen Einheiten ungleich Null ist, gilt die Grundformel der Verwebung  $e_r e_s = e_s e_r$  (Größenlehre 61) und geht daraus das ganze Gesetz der Verwebung (Größenlehre 62) hervor, d. h. man kann in jeder Größenknüpfung ohne Aenderung des Wertes die Plusklammern und Malklammern beliebig setzen oder weglassen, die Ordnung der Fache oder Faktoren beliebig ändern und die Beziehungsklammern auflösen, indem man jedes Stück des einen Faches mit jedem des andern verwebt und die Zeuge zufügt (die Produkte addirt). Es ist dies das Gesetz, welches in der Zahlenlehre seine Geltung hat, der Begründer der Ausdehnungslehre H. Grassmann hat diese Art der Multiplikation daher die algebraische genannt. Es versteht sich von selbst, dass ihr auch eine algebraische Teilung oder Division, eine Höhung oder Potenzirung u. f. w. zur Seite geht, und dass man für alle diese Verknüpfungen ausgedehnter Größen unmittelbar die Gesetze der Zahlenlehre als geltend annehmen darf. Ich nenne diese Art der Webung in der Ausdehnungslehre eine Flechtung, das Zeug oder Produkt ein Flecht\*. Der Name algebraische Multiplikation kann leicht zu Irrungen und Missverständnissen führen. Es ist ja unzweifelhaft, dass jedes Vielfache  $aa$  ein algebraisches Produkt ist, dasselbe wird in allen Arten der Multiplikation, bei innerer Webung, wie bei Flachung und Flechtung angewandt. Das Flecht der Ausdehnungslehre muss von diesem algebraischen Produkte unterschieden werden, ich wende daher lieber den Namen Flechtung und Flecht an. Der Bruder hat den Namen algebraische Multiplikation nur gewählt, um den Mathematikern die Sache mehr mundgerecht zu machen und dadurch die Einführung zu erleichtern. Der Begriff der Flechtung ist überdies ein neuer und ist daher für den neuen Begriff auch ein neuer Name erforderlich oder doch wünschenswert.

Für die zweite Art der Webung, welche den Ausgeschieden (Komplexionen ohne Wiederholung) entspricht, für welche die Vertauschung zweier Einheiten gilt und für welche zugleich das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist, gilt die Bedingung  $e_a e_a = 0$ , und, da in der Ausdehnungslehre jede Gröse als Einheit gesetzt werden kann, auch  $0 = (e_a + e_b)(e_a + e_b) = e_a e_a + e_a e_b + e_b e_a + e_b e_b$  also da  $0 = e_a e_a = e_b e_b$ , auch  $0 = e_a e_b + e_b e_a$ .

Da nun ferner Vertauschung gilt, so ist  $e_a e_b = e_b e_a$  mithin auch  $e_a e_b = 0$ , d. h. es werden für diese Art der Verwebung sämtliche Zeuge oder Produkte Null und fällt diese Art der Rechnung mithin aus.

Für die dritte Art der Webung, welche den Vollgeändern (Variationen mit Wiederholung) entspricht, für welche also nicht Vertauschung gilt und für welche zugleich das Zeug zweier gleichen Einheiten ungleich Null ist, gilt nur die Grund-

\* Das Flechten bezeichnet ein Verknüpfen von jedem mit jedem, ist also für diese Art der Zeuge ein ganz passender Name, da  $e_1$  und  $e_2$  geflochten  $e_1 e_1$   $e_2 e_1$   $e_1 e_2$   $e_2 e_2$  geben und alle diese Produkte ihre Werte behalten, ohne zu verschwinden.



formel der Einwebung (Größenlehre 57) und daraus abgeleitet das Gesetz der Einwebung (Größenlehre 60), d. h. man kann in jeder Größenknüpfung die Plusklammern und die Malklammern beliebig setzen oder weglassen und die Beziehungsklammern auflösen, indem man jedes Stück des einen Faches (Faktors) mit jedem des andern webt und die Zeuge zufügt (die Produkte addirt). Es scheint hienach, als könnte auch diese Art der Webung oder Multiplikation in der Ausdehnungslehre verwandt werden; allein es ergibt sich, dass diese Art der Webung nicht Zeuge liefert, welche gleichmässig oder symmetrisch und zugleich unabhängig von den ursprünglich gesetzten Einheiten sind, und dass diese Art der Webung daher für die Ausdehnungslehre keine allgemeinen Gesetze liefert.

Für die vierte Art der Webung, welche den Ausgeändern (Variationen ohne Wiederholung) entspricht, für welche also nicht Vertauschung gilt, für welche aber das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist, gilt die Grundformel  $e_a e_a = 0$  und, da in der Ausdehnungslehre jede GröÙe als Einheit gesetzt werden kann, auch  $0 = (e_a + e_b)(e_a + e_b) = e_a e_a + e_a e_b + e_b e_a + e_b e_b$  mithin da  $0 = e_a e_a = e_b e_b$  auch  $0 = e_a e_b + e_b e_a$ , mithin  $e_b e_a = -e_a e_b$ .

Es bildet diese Art der Webung oder Multiplikation die der Ausdehnungslehre eigentümliche Verknüpfung. Der Begründer der Ausdehnungslehre hat diese Art der Multiplikation die kombinatorische genannt, ich nenne sie eine Flachung, das Zeug oder Produkt ein Flach\*. Der Name kombinatorisches Produkt kann leicht zu Irrungen und Missverständnissen führen. In der Kombinationslehre wird jede Kombination ein Zeug oder Produkt und zwar, wenn  $aa \sum a$ ,  $a + a = a$  ist, ein kombinatorisches Produkt genannt. Das Flach der Ausdehnungslehre muss von diesem kombinatorischen Produkte unterschieden werden. Ich wende daher lieber die Namen Flach und Flachung an. Die Sätze werden dadurch auch deutlicher und kürzer. Der Bruder hat den Namen kombinatorisches Produkt wieder aus Rücksicht auf die Mathematiker gewählt, um diesen die Sache leichter und bequemer zu machen.

Wir haben also von der äusern Webung oder Multiplikation der Ausdehnungslehre zwei Arten kennen gelernt, die Flechtung und die Flachung oder die algebraische und die kombinatorische Multiplikation. Von diesen ist die Flachung bei weitem die einfachere. In der Tat, betrachten wir bei zwei Einheiten  $e_1$  und  $e_2$  das Zeug zweier Fache oder Faktoren  $[(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)] = \alpha_1 \beta_1 [e_1 e_1] + \alpha_2 \beta_2 [e_2 e_2] + \alpha_1 \beta_2 [e_1 e_2] + \alpha_2 \beta_1 [e_2 e_1]$ , so führt sich dies bei der zweiten Gattung, wo  $[e_1 e_1] = [e_2 e_2] = 0$ ,  $[e_2 e_1] = -[e_1 e_2]$  ist, auf  $(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)[e_1 e_2]$ , also auf nur eine Einheit, nämlich  $[e_1 e_2]$  zurück; ja, wenn in einer Entwicklungsreihe nie mehr als jene beiden ursprünglichen Einheiten  $e_1$  und  $e_2$  vorkommen, so wird man, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu tun,  $[e_1 e_2] = 1$  setzen können, und erhält dann als das Zeug eine Zahl. Ganz anders bei der ersten Gattung, wo sich jenes Zeug auf  $\alpha_1 \beta_1 [e_1 e_1] + \alpha_2 \beta_2 [e_2 e_2] + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)[e_1 e_2]$  zurückführt, also auf nicht weniger als drei Einheiten. Wenn hier nur die beiden ursprünglichen Einheiten  $e_1$  und  $e_2$  vorkommen, so kann man als ein.

---

\* Flach stammt vom alten Verb spal, sskr. phal spalten, bersten. Davon ist abgeleitet palaka, sskr. phalaka, gr. plák-s, lat. planca, Brett, Planke, ahd. flah, nhd. Flach, die Fläche: das auseinander Tretende, sich Ausdehnende.



fachsten Fall  $e_1 = 1$  und  $e_2 = i = (-1)^{1/2}$  setzen und hat dann  $e_1 e_1 = -e_2 \cdot e_2 = 1$  und  $e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = i$ , das heist, man erhält dann als Grösen die Richtgrösen oder komplexen Grösen  $a + ib$ , welche also nur einen einfachen Fall dieser Art der Knüpfung darstellen. Da es in der Entwicklung der Wissenschaft vor allen Dingen darauf ankommt, die nach und nach hervortretenden Grösen in ihrem einfachsten Begriffe zu erfassen, so werden wir mit der Flachung beginnen und sie in der Ausdehnungslehre behandeln, während wir die Flechtung erst im höhern Zweige der Aussenlehre oder Synthesis erörtern werden.

79. **Erklärung.** Das äusere Zeug oder Produkt heist in der Ausdehnungslehre ein Flach (ein kombinatorisches Produkt), wenn das Zeug zweier gleichen Einheiten Null ist, und auch je zwei Zeuge oder Produkte von Einheiten, welche durch Vertauschung der beiden letzten Fache oder Faktoren aus einander hervorgehen, zur Summe Null geben, das Zeichen derselben ist die Flachkammer [ ], oder in Formeln

$$[e_a \cdot e_a] = 0 \quad [e_a e_b] + [e_b e_a] = 0.$$

80. **Erklärung.** Das äusere Zeug oder Produkt heist in der Aussenlehre oder Synthesis ein Flecht oder ein algebraisches Produkt, wenn das Zeug je zweier gleichen Einheiten, die ungleich Null sind, auch ungleich Null ist, und in dem Zeuge ungleicher Fache oder Faktoren Vertauschung der Fache gilt, das Zeichen derselben ist das der gewöhnlichen Webung, oder in Formeln  $e_a e_a \geq 0 \quad e_a e_b = e_b e_a$

Um vollständig klar zu sein, entwickeln wir beispielsweise die verschiedenen Einheiten 3. Klasse aus den 6 ursprünglichen Einheiten  $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6$ , wobei wir die Zeuge, in denen gleiche ursprüngliche Einheiten vorkommen, in dem einen Beispiele, wie bei den Flechten, ungleich Null, im andern, wie bei den Flächen, gleich Null setzen.

Die Flechte dritter Klasse aus  
6 ursprünglichen Einheiten.

$e_1 e_1 e_1, e_1 e_1 e_2, e_1 e_1 e_3, e_1 e_1 e_4, e_1 e_1 e_5, e_1 e_1 e_6$   
 $e_1 e_2 e_2, e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, e_1 e_2 e_5, e_1 e_2 e_6$   
 $e_1 e_3 e_3, e_1 e_3 e_4, e_1 e_3 e_5, e_1 e_3 e_6$   
 $e_1 e_4 e_4, e_1 e_4 e_5, e_1 e_4 e_6$   
 $e_1 e_5 e_5, e_1 e_5 e_6$   
 $e_1 e_6 e_6$   
 $e_2 e_2 e_2, e_2 e_2 e_3, e_2 e_2 e_4, e_2 e_2 e_5, e_2 e_2 e_6$   
 $e_2 e_3 e_3, e_2 e_3 e_4, e_2 e_3 e_5, e_2 e_3 e_6$   
 $e_2 e_4 e_4, e_2 e_4 e_5, e_2 e_4 e_6$   
 $e_2 e_5 e_5, e_2 e_5 e_6$   
 $e_2 e_6 e_6$   
 $e_3 e_3 e_3, e_3 e_3 e_4, e_3 e_3 e_5, e_3 e_3 e_6$   
 $e_3 e_4 e_4, e_3 e_4 e_5, e_3 e_4 e_6$

Die Fläche dritter Klasse aus  
6 ursprünglichen Einheiten.

$e_1 e_2 e_3, e_1 e_2 e_4, e_1 e_2 e_5, e_1 e_2 e_6$   
 $e_1 e_3 e_4, e_1 e_3 e_5, e_1 e_3 e_6$   
 $e_1 e_4 e_5, e_1 e_4 e_6$   
 $e_1 e_5 e_6$   
 $e_2 e_3 e_4, e_2 e_3 e_5, e_2 e_3 e_6$   
 $e_2 e_4 e_5, e_2 e_4 e_6$   
 $e_2 e_5 e_6$   
 $e_3 e_4 e_5, e_3 e_4 e_6$



|                                         |               |
|-----------------------------------------|---------------|
| $e_3 e_5 e_5, e_3 e_5 e_6$              | $e_3 e_5 e_6$ |
| $e_3 e_6 e_6$                           |               |
| $e_4 e_4 e_4, e_4 e_4 e_5, e_4 e_4 e_6$ |               |
| $e_4 e_5 e_5, e_4 e_5 e_6$              | $e_4 e_5 e_6$ |
| $e_4 e_6 e_6$                           |               |
| $e_5 e_5 e_5, e_5 e_5 e_6$              |               |
| $e_5 e_6 e_6$                           |               |
| $e_6 e_6 e_6$                           |               |

Jeder, welcher die Kombinationslehre kennt, sieht auf den ersten Blick, dass dies die Geschiede oder Komplexionen sind, aber als Zeuge oder Produkte im Sinne der äusern Webung oder Multiplikation aufgefasst.



## Zweiter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Flachungslehre.

### 6. Die Gesetze der Flachungslehre.

81. **Erklärung.** Das Flach oder kombinatorische Produkt heist ein Zeug oder Produkt von Einheiten, die Webung heist Flachung oder kombinatorische Multiplikation, wenn

- 1) jedes Zeug, welches nur verschiedene Einheiten enthält, ungleich Null ist und
- 2) die Summe zweier Zeuge von Einheiten, welche durch Vertauschung der beiden letzten Einheiten aus einander hervorgehen, Null ist.

Das Zeichen des Flaches ist eine um das Zeug gesetzte Flachklammer, gelesen „Flach“ z. B.  $[e_1 e_2]$  gelesen Flach  $e_1 e_2$ .

Zwei Größen heißen gleichgeordnet, wenn in zwei Reihen der Größen dieselbe Gröse die frühere, sie heißen entgegengesetzt geordnet, [wenn in der einen Reihe die Gröse die frühere ist, welche in der andern die spätere ist.

Die Flachung oder die kombinatorische Multiplikation haben wir die äussere Webung oder Multiplikation genannt, für welche  $[e_a \cdot e_a] = 0$  und  $[e_a \cdot e_b] + [e_b \cdot e_a] = 0$  ist. In der obigen Erklärung ist die letzte Bedingungsgleichung etwas allgemeiner gefasst, wie sie für die weitere Ableitung erforderlich ist, die erste Bedingungsgleichung aber fortgelassen, da sie sich aus der andern von selbst ergibt und in Satz 829 abgeleitet wird.

Für die Flachklammer wird meist aus Bequemlichkeit der Drucker die scharfkantige Klammer  $[ ]$  genommen, welche allgemein für gewöhnliche Klammern verwandt wird, sobald zwei Arten von Klammern zu unterscheiden sind z. B.  $[a + b (c - x^2)]^{1/2}$ . Es kann nun leicht zu Verwirrungen führen, wenn diese selbe Klammer zur Bezeichnung der Fläche und zugleich für gewöhnliche



Zeuge oder Produkte verwandt wird. Ich habe daher eine abweichende Form für die Flachklammer eingeführt, welche jede Verwechslung ausschließt.

**Satz.**  $[e_1 e_2 e_3 \dots] \geq 0$ . 82.

Jedes Flach, in welchem nur ungleiche Einheiten geflacht sind, ist ungleich Null.

**Satz.**  $[E e_r e_s] + [E e_s e_r] = 0$ . 83.

Die Summe zweier Fläche von Einheiten, welche auseinander durch Vertauschung der letzten beiden Einheiten hervorgehen, ist Null.

**Satz.** Für die Fläche gilt das Einigungs- und das Beziehungs- 84.  
gesetz für alle Größen, dagegen gilt das Vertauschungsgesetz der Fläche oder Faktoren nur für Zahlen.

**Beweis.** Unmittelbar aus 3 und 4.

Für die Flachung oder kombinatorische Multiplikation gilt nicht die Vertauschung der Fläche oder Faktoren, sofern dies Einheiten oder Größen der Ausdehnungslehre sind. So ist nach 818  $e_r e_s \geq e_s e_r$ , wenn  $r \geq s$  ist; aber da  $[e_r e_s] + [e_s e_r] = 0$  ist, so besteht der Unterschied dieser Fläche nur im Vorzeichen; es ist  $[e_r e_s] = -[e_s e_r]$ . Es ändert sich also bei der Vertauschung der Fläche oder Faktoren nur das Vorzeichen oder die Vorzahl. Die nächste Aufgabe wird es demnach sein, festzustellen, welches Vorzeichen das Flach erhält, wenn die Ordnung der Fläche beliebig geändert wird.

**Satz.** Für die Flachung gelten namentlich auch die Sätze 85.  
70 bis 76.

**Beweis.** Da diese Sätze für alle Arten der Webung oder Multiplikation gelten, so gelten sie auch für die Flachung.

**Satz.**  $[Abc] + [Ac b] = 0$ , wo  $b$  und  $c$  Größen erster 86.  
Klasse sind.

Man kann in jedem Fläche von Größen erster Klasse die beiden letzten vertauschen, wenn man zugleich das Vorzeichen entgegengesetzt nimmt.

**Beweis.** a. Es seien  $b$  und  $c$  Einheiten. Die Gröse  $A$  lässt sich als Zeug von Größen erster Klasse auf die Form bringen  $A = S\alpha_r E_r$ , wo  $E_r$  ein Zeug von Einheiten ist. Führt man diesen Ausdruck ein, so ist

$$\begin{aligned} [Abc] + [Ac b] &= \left[ S\alpha_a E_{abc} \right]_{1,n} + \left[ S\alpha_a E_{acb} \right]_{1,n} = S\alpha_a [E_{abc}]_{1,n} + S\alpha_a [E_{acb}]_{1,n} \\ &\quad \text{(nach 73)} \\ &= S\alpha_a ([E_{abc}] + [E_{acb}])_{1,n} \\ &\quad \text{(nach 4)} \\ &= S\alpha_a \cdot 0 = 0 \quad \text{(nach 83)} \end{aligned}$$



b. Es seien  $b$  und  $c$  Größen erster Klasse und sei  $b = S\beta_{r,e_r}$  und  $c = S\gamma_{r,e_r}$ , so ist

$$\begin{aligned} [Abc] + [Ac b] &= \left[ A \left( S\beta_{a e_a} \right) \left( S\gamma_{b e_b} \right) \right] + \left[ A \left( S\gamma_{b e_b} \right) \left( S\beta_{a e_a} \right) \right] \\ &= S\beta_{a \gamma b} [A e_a e_b] + S\beta_{a \gamma b} [A e_b e_a] \quad (\text{nach 71}) \\ &= S\beta_{a \gamma b} ([A e_a e_b] + [A e_b e_a]) \quad (\text{nach 3}) \\ &= S\beta_{a \gamma b} 0 = 0 \quad (\text{nach 86.a}) \end{aligned}$$

Viel einfacher ist der Beweis für ein Gebiet dritter Stufe, wie es der äussere Raum ist. Ich lasse daher diesen Beweis noch in der Anmerkung folgen, da er die Sache klarer macht.

Beweis für ein Gebiet dritter Stufe. Es sei  $a = S\alpha_{a e_a}$ ,

$b = S\beta_{b e_b}$ ,  $\gamma = S\gamma_{c e_c}$ , so ist nach 75

$$\begin{aligned} [abc] + [acb] &= S(\alpha_a \beta_b \gamma_c) [e_a e_b e_c] + S(\alpha_a \gamma_c \beta_b) [e_a e_c e_b] \\ &= S(\alpha_a \beta_b \gamma_c) ([e_a e_b e_c] + [e_a e_c e_b]) \quad (\text{nach } 3_2) \\ &= S(\alpha_a \beta_b \gamma_c) 0 = 0 \quad (\text{nach 83}) \end{aligned}$$

87. Satz.  $[AbcD] + [Ac bD] = 0$ , wo  $b$  und  $c$  Größen erster Klasse.

Man kann in jedem Fläche von Größen erster Klasse beliebige zwei auf einander folgende Größen vertauschen, wenn man zugleich das Vorzeichen entgegengesetzt nimmt.

$$\begin{aligned} \text{Beweis. Es ist } [AbcD] + [Ac bD] &= ([Abc] + [Ac b])D \\ &= 0 \cdot D = 0 \quad (\text{nach } 3_2) \end{aligned}$$

88. Satz.  $[P_{a,b}] + [P_{b,a}] = 0$  oder  $[P_{a,b}] = -[P_{b,a}]$

In jedem Fläche von Größen erster Klasse kann man beliebige zwei Größen vertauschen, wenn man zugleich das Vorzeichen entgegengesetzt nimmt.

Beweis. Wenn zwischen  $a$  und  $b$  noch  $n$  Größen erster Klasse stehen: so vertausche man  $a$  mit der nächstfolgenden und so fort mit den  $n + 1$  nächstfolgenden, so hat es die Stelle des  $b$ ; demnächst vertausche man  $b$  mit der nächstvorhergehenden und demnächst mit den  $n$  vorhergehenden, so hat es die Stelle, welche zuerst  $a$  hatte. Im Ganzen sind hierbei zwei auf einander folgende Größen  $2n + 1$  mal vertauscht und ist dadurch das Vorzeichen  $2 + 1$  mal entgegengesetzt geworden und zuletzt entgegengesetzt geblieben, d. h. es ist  $[P_{a,b}] = -[P_{b,a}]$



Wir kommen nun zu der Betrachtung der Fläche von Größen höherer Klasse oder zu den Flächen der Fläche.

**Satz.**  $[AB_r C_s] = (-1)^{rs} [AC_s B_r]$ , 89.

wo  $B_r$  ein Zeug (Produkt) von  $r$ ,  $C_s$  ein Zeug von  $s$  Flächen oder Faktoren erster Klasse ist oder

Wenn man in einem Fläche von Größen erster Klasse eine Reihe von  $r$  Größen mit einer unmittelbar darauf folgenden Reihe von  $s$  Größen vertauscht, ohne im Uebrigen die Folge der Größen zu ändern, so ist das hervorgehende Flach gleich dem ursprünglichen mal  $(-1)^{rs}$ .

Beweis. Es sei  $C_s = c_1 c_2 \cdots c_s$ ; rückt man nun  $c_1$  vor  $B_r$ , d. h. vertauscht man es mit der nächstvorhergehenden und so fort mit den  $r$  vorhergehenden Größen, so ändert sich das Zeichen  $r$  mal und es wird

$$\begin{aligned} [AB_r C_s] &= [AB_r c_1 c_2 \cdots c_s] = (-1)^r [Ac_1 B_r c_2 \cdots c_s] \\ &= (-1)^{2r} [Ac_1 c_2 B_r c_3 \cdots c_s] \text{ u. s. w.} \\ &= (-1)^{sr} [Ac_1 c_2 \cdots c_s B_r] = (-1)^{rs} [AC_s B_r] \end{aligned}$$

**Satz.**  $[A_q B_r C_s] = (-1)^{qr + qs + rs} [C_s B_r A_q]$  90.

Wenn man in einem Fläche von Größen erster Klasse eine Reihe von  $q$  Größen, welche durch eine Reihe von  $r$  Größen von einer Reihe von  $s$  Größen getrennt sind, mit letzteren vertauscht, so ist das hervorgehende Flach gleich dem ursprünglichen mal  $(-1)^{qr + qs + rs}$

$$\begin{aligned} \text{Beweis. Es ist } [A_q B_r C_s] &= (-1)^{(q+r)s} [C_s A_q B_r] \quad (\text{nach 89}) \\ &= (-1)^{(q+r)s} (-1)^{qr} [C_s B_r A_q] \quad (\text{nach 89}) \\ &= (-1)^{qr + qs + rs} [C_s B_r A_q]. \end{aligned}$$

**Satz.**  $[P] = (-1)^r [Q]$ , 91.

wo  $[P]$  und  $[Q]$  dieselben Fläche oder Faktoren erster Klasse enthalten und  $r$  die Anzahl der Größenpaare bezeichnet, welche in  $P$  und  $Q$  entgegengesetzt geordnet sind oder

Zwei Fläche von Größen erster Klasse, welche dieselben Größen enthalten, sind einander gleich, wenn eine gerade, einander entgegengesetzt, wenn eine ungerade Anzahl von Größenpaaren in beiden Flächen entgegengesetzt geordnet sind.

Beweis. Seien in  $[Q]$   $r$  Größenpaare erster Klasse entgegengesetzt wie in  $[P]$ , so vertausche man jedes dieser  $r$  Paare, so wird aus  $[Q]$   $[P]$ , zugleich aber ist bei jedem dieser Tausche das Zeichen nach Satz 88 entgegengesetzt geworden, d. h. es ist  $[P] = (-1)^r [Q]$ .

**Satz.**  $[P_{a,a}] = 0$ . 92.

Wenn in einem Fläche zwei Fläche oder Faktoren gleich sind, so ist das Flach Null.



Beweis. Nach Satz 88 ist  $[P_{a,b}] + [P_{b,a}] = 0$ , also wenn  $a$  und  $b$  gleich sind, so ist

$$0 = [P_{a,a}] + [P_{a,a}] = 2[P_{a,a}], \text{ d. h. } [P_{a,a}] = 0.$$

93. **Satz.** Ein Flach von Größen erster Klasse  $[a_1 a_2 \cdots a_n]$  ist Null wenn zwischen den Größen eine Hörigkeit herrscht.

Beweis. Es sei  $a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots + \alpha_n a_n$ , so ist

$$\begin{aligned} [a_1 a_2 \cdots a_n] &= [(\alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots + \alpha_n a_n) a_2 a_3 \cdots a_n] \\ &= \alpha_2 [a_2 a_2 a_3 \cdots a_n] + \alpha_3 [a_3 a_2 a_3 \cdots a_n] + \cdots + \alpha_n [a_n a_2 a_3 \cdots a_n] \\ &\quad \text{(nach 4 und 73)} \\ &= \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 + \cdots + \alpha_n \cdot 0 = 0 \quad \text{(nach 92)} \end{aligned}$$

Wir kommen nun zu den Sätzen über die Flachung von Vielfachensummen. Die Fläche der Vielfachensummen von Einheiten erster Klasse entwickeln sich nach dem Satze 75.

94. **Satz.**  $[(S\alpha_a a_a) \cdot (S\mu_b b_b) \cdot (S\gamma_c c_c) \cdots (S\mu_m m_m)] = S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m) [a_a b_b c_c \cdots m_m]$  wo  $a_a, b_b, c_c \cdots m_m$  beliebige Größen erster Klasse,  $\alpha_a \beta_b \cdots$  beliebige Zahlen oder

Das Flach mehrerer Vielfachensummen aus beliebigen Größen erhält man, indem man jede GröÙe der ersten Vielfachensumme mit jeder der zweiten, das Zeug derselben mit jeder der dritten u. s. w. zu einem Teilzeuge flacht (multipliziert), jedes dieser Teilzeuge mit dem Zeuge der zu den betreffenden Größen gehörigen Vorzahlen vervielfacht, und dann sämtliche Zeuge, welche sich auf diese Weise bilden lassen, zufügt oder addiert.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 75.

95. **Satz.**  $(S\alpha_a a_a) \cdot (S\beta_b a_b) \cdots (S\mu_m a_m) = S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m) [a_a a_b a_c \cdots a_m]$  wo  $a_a a_b a_c \cdots a_m$  beliebige Größen erster Klasse im Gebiete  $n$ ter Stufe und  $\alpha_a, \beta_b, \gamma_c, \cdots, \mu_m$  beliebige Zahlen sind.

Beweis. Unmittelbar nach Satz 94.

Da sich nach Satz 91 für die Fläche beim Vertauschen der Fache oder Faktoren nur das Vorzeichen ändert, so kann man bei allen den Zeugen, welche dieselben  $m$  Größen  $a_a a_b \cdots a_m$  enthalten, die Fache unter Berücksichtigung des Vorzeichens so umordnen, dass die Zeiger der Größen steigend geordnet sind und kann dann alle diese Zeuge in ein Glied zusammenfassen, indem man die Summe der Vorzahlen dieser sämtlichen Zeuge, jede mit ihrem Vorzeichen in eine Vorzahl vereinigt und diese mit dem Fläche vervielfacht.

Die Vorzahl ist dann die Summe der Tausche oder Permutationen aus den  $m$  Fachen  $\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m$ , sofern man jeder Tausche das entsprechende Vorzeichen giebt.

Man erhält diese Tausche, wenn man jede der  $m$  Zahlen  $\alpha_a$  z. B.  $\alpha_c$  mit jeder der andern Zahlen  $\beta, \gamma \cdots \mu$  webt, sofern alle diese Zahlen andere Zeiger als  $\alpha_a$ , hier also als  $\alpha_c$  haben. Es wird also  $\alpha_c$  mit den sämtlichen Tauschen aus den  $m-1$  Fachen  $\beta_b \gamma_c \cdots \mu_m$ , wo  $b, c \cdots m$  ungleich  $c$  ist, gewebt. Die Anzahl



der Glieder in dieser Summe ist also gleich der Anzahl der Tausche aus  $m$  Größen d. h.  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m = m!$  Gleiche Zeiger können unter den  $m$  Zahlen  $\alpha_a \beta_b \cdots \mu_m$  nicht vorkommen, da dann das Flach  $[a_a b_b \cdots a_m]$  nach 92 Null wäre.

Das Vorzeichen jedes Gliedes ist  $(-1)^r$  wo  $r$  die Zahl der niederen Zeiger angiebt, vor welche ein höherer Zeiger getreten ist. So ist in  $\alpha_4 \beta_1 \gamma_2 \delta_3$  das  $r = 3$ , in  $\alpha_3 \beta_4 \gamma_1 \delta_2$  das  $r = 4$ , in  $\alpha_4 \beta_3 \gamma_1 \delta_2$  das  $r = 5$  u. s. w.

Wir nennen die Summe aus diesen Tauschen mit ihren Vorzeichen die Flachtausche.

Es ist also  $S(\alpha_a \beta_b)[a_1 a_2] = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)[a_1 a_2]$

Es ist  $S(\alpha_a \beta_b \gamma_c)[a_1 a_2 a_3] = (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 - \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1)[a_1 a_2 a_3]$

Es ist  $S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \delta_d)[a_1 a_2 a_3 a_4] =$

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4 - \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 \delta_4 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 \delta_4 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 \delta_4 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 \delta_4 - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 \delta_4 \\ & - \alpha_1 \beta_2 \gamma_4 \delta_3 + \alpha_2 \beta_1 \gamma_4 \delta_3 + \alpha_1 \beta_3 \gamma_4 \delta_2 - \alpha_2 \beta_3 \gamma_4 \delta_1 - \alpha_3 \beta_1 \gamma_4 \delta_2 + \alpha_3 \beta_2 \gamma_4 \delta_1 \\ & + \alpha_1 \beta_4 \gamma_2 \delta_3 - \alpha_2 \beta_4 \gamma_1 \delta_3 - \alpha_1 \beta_4 \gamma_3 \delta_2 + \alpha_2 \beta_4 \gamma_3 \delta_1 + \alpha_3 \beta_4 \gamma_1 \delta_2 - \alpha_3 \beta_4 \gamma_2 \delta_1 \\ & - \alpha_4 \beta_1 \gamma_2 \delta_3 + \alpha_4 \beta_2 \gamma_1 \delta_3 + \alpha_4 \beta_1 \gamma_3 \delta_2 - \alpha_4 \beta_2 \gamma_3 \delta_1 - \alpha_4 \beta_3 \gamma_1 \delta_2 + \alpha_4 \beta_3 \gamma_2 \delta_1)[a_1 a_2 a_3 a_4] \end{aligned}$$

Man entwickelt die Flachtausche am bequemsten schrittweise erst für 2, dann für 3, für 4 u. s. w. Fache und zwar so, dass man jedesmal das neu hinzutretende Fach zuerst die letzte Stelle, dann die vorletzte, drittletzte bis zur ersten Stelle hin einnehmen lässt. Bei 2 Fachen erhält man dann 1.2, bei 3 Fachen 1.2.3, bei 4 Fachen 1.2.3.4 Glieder, kurz bei  $n$  Fachen  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$  Glieder, kurz man erhält die sämtlichen Tausche, wie diese in der Kombinationslehre entwickelt sind. Die Zeichen folgen dann leicht. Bei 5 Fachen würde Beispielsweise die 5 jede der 5 Stellen einnehmen können und würden auf jeder Stelle die 4 anderen Fache die 24 Glieder entwickeln, welche wir bei  $n = 4$  kennen gelernt haben.

**Erklärung.** Die Flachtausche oder Determinante aus 96.  $m$  Reihen von je  $m$  Zahlen  $\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m$  heist der Gliederausdruck, welchen man aus dem Zeuge  $\alpha_a \beta_b \cdots \mu_m$ , in welchem die Zeiger steigend geordnet sind, dadurch erhält, dass man in ihm die Zeiger nach und nach auf alle möglichen Weisen versetzt, während man die Reihenfolge  $\alpha \beta \gamma \cdots \mu$  unverändert lässt und dann jedes dieser Fläche mit  $(-1)^r$  vervielfacht, wo  $r$  die Zahl der niederen Zeiger angiebt, vor welche ein höherer Zeiger getreten ist.

Das Zeichen der Flachtausche oder Determinante aus  $m$  Reihen zu  $n$  Zahlen ist  $\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)$  kurz  $\Delta^m$ .

Als Beispiel gebe ich noch

$$\Delta^3(\delta_4 \zeta_6 \vartheta_8) = \delta_4 \zeta_6 \vartheta_8 - \delta_4 \zeta_8 \vartheta_6 - \delta_6 \zeta_4 \vartheta_8 + \delta_6 \zeta_8 \vartheta_4 + \delta_8 \zeta_4 \vartheta_6 - \delta_8 \zeta_6 \vartheta_4.$$

Der Name, die Determinante, d. h. wörtlich die Bestimmende, die Begrenzende bezeichnet eigentlich gar nicht die Sache; denn ebenso gut wie dieser Ausdruck ist jede Vorzahl eine determinans. Das Eigentümliche dieser Zahl dagegen ist, dass sie die Summe ist aus den Tauschen, sofern man jedem Gliede das bei der Flachung entstehende Vorzeichen giebt, der Name die Flachtausche bezeichnet diesen Begriff genau. Ich habe daher diese Zahl zum Unterschiede von den andern Vorzahlen die Flachtausche genannt, setze aber stets den lateinischen Namen daneben.



97. Satz.  $A_{1,n}^m = S(-1)^r \alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m$ , wo  $r$  die Zahl der niedern

Zeiger angiebt, vor welche ein höherer Zeiger getreten ist.

Die wohlgeordneten Fläche mter Klasse  $[a_a a_b a_c \cdots a_m]$  aus dem Gebiete nter Stufe  $a_1 a_2 \cdots a_n$  bilden die Ausgeschiede oder Komplexionen ohne Wiederholung aus nEinfachen oder Elementen zur mten Klasse, jedes Ausgeschiede als ein Flach betrachtet. Ich nenne diese Fläche die Geschiedsfläche.

98. Erklärung. Die Geschiedsfläche aus n Grösen zur mten Klasse heissen die Fläche mit mFachen aus diesen Grösen, welche man erhält, wenn man diese Grösen nach steigendem Zeiger in eine Reihe ordnet, und dann jede dieser Grösen mit jeder folgenden flacht, dann weiter jedes Flach aus a Grösen mit jeder auf die letzte Gröse dieses Flaches folgenden Gröse flacht und so fortfährt, bis in jedem Fläche m der Grösen als Fache oder Faktoren enthalten find.

Das Zeichen der Geschiedsfläche aus n Grösen zur mten Klasse ist  $[a_1, a_2, \dots, a_n]^m$ .

Einige Beispiele werden eine Anschauung der Geschiedsfläche geben. Es ist

|                              |           |               |               |               |               |       |
|------------------------------|-----------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------|
| $[a_1, a_2, \dots, a_6]^1 =$ | $a_1$     | $a_2$         | $a_3$         | $a_4$         | $a_5$         | $a_6$ |
| $[a_1, a_2, \dots, a_6]^2 =$ | $a_1 a_2$ | $a_1 a_3$     | $a_1 a_4$     | $a_1 a_5$     | $a_1 a_6$     |       |
|                              |           | $a_2 a_3$     | $a_2 a_4$     | $a_2 a_5$     | $a_2 a_6$     |       |
|                              |           |               | $a_3 a_4$     | $a_3 a_5$     | $a_3 a_6$     |       |
|                              |           |               |               | $a_4 a_5$     | $a_4 a_6$     |       |
|                              |           |               |               |               | $a_5 a_6$     |       |
| $[a_1, a_2, \dots, a_6]^3 =$ |           | $a_1 a_2 a_3$ | $a_1 a_2 a_4$ | $a_1 a_2 a_5$ | $a_1 a_2 a_6$ |       |
|                              |           |               | $a_1 a_3 a_4$ | $a_1 a_3 a_5$ | $a_1 a_3 a_6$ |       |
|                              |           |               |               | $a_1 a_4 a_5$ | $a_1 a_4 a_6$ |       |
|                              |           |               | $a_2 a_3 a_4$ | $a_2 a_3 a_5$ | $a_2 a_3 a_6$ |       |
|                              |           |               | $a_2 a_3 a_4$ | $a_2 a_3 a_5$ | $a_2 a_3 a_6$ |       |
|                              |           |               |               | $a_2 a_4 a_5$ | $a_2 a_4 a_6$ |       |
|                              |           |               |               |               | $a_2 a_5 a_6$ |       |
|                              |           |               |               | $a_3 a_4 a_5$ | $a_3 a_4 a_6$ |       |
|                              |           |               |               |               | $a_3 a_5 a_6$ |       |
|                              |           |               |               |               | $a_4 a_5 a_6$ |       |

Jeder, der die Kombinationslehre kennt, sieht auf den ersten Blick, dass diese Geschiedsfläche nichts anderes find, als die Ausgeschiede (Komplexionen ohne Wiederholung), sofern man jedes Geschiede als ein Flach auffasst.

Die Anzahl dieser Geschiedsfläche ist demnach

$$n^m = \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdots m} = \frac{n!}{m! (n-m)!} \quad \text{wo } m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m.$$

99. Satz. Die Geschiedsfläche aus n Grösen zur mten Klasse find die Ausgeschiede (Komplexionen ohne Wiederholung) aus diesen n Grösen zur mten Klasse, wenn man jedes Geschiede als ein Flach betrachtet.

Beweis. Unmittelbar aus Satz 98 und den Vorbemerkungen.



**Satz.**  $(S_{\alpha a a}) \cdot (S_{\beta b a b}) \cdots (S_{\mu m a m}) = S A^m \cdot [a_a a_b \cdots a_m]$  wo 100.  
 $a < b < c \cdots < m$ . Jedes Flach von  $m$  Grösen erster Klasse, welche zu  $n$  gegenseitig freien Grösen  $a_1 \cdots a_n$  hörig sind, ist die Vielfachenfumme der Geschiedsfläche dieser freien Grösen zur  $m$ ten Klasse, in welcher die Vorzahl jedes Geschiedsflaches die Flachtausche oder Determinante aus denjenigen  $m$  Vorzahlen ist, welche zu den  $m$  hörigen Grösen des Geschiedsflaches gehören.

**Beweis.** Unmittelbar nach 95 in Verbindung mit 97 und 99.

**Satz.** Das Flach von  $n$  Grösen erster Klasse, welche zu  $n$  gegenseitig freien Grösen  $a_1 \cdots a_n$  hörig sind, erhält man, indem man aus den  $n$  Reihen der je  $n$  Vorzahlen die Flachtausche oder Determinante bildet und diese mit dem Fläche  $[a_1 a_2 \cdots a_n]$  vielfacht, oder 101.

Alle Fläche  $n$ ter Klasse, welche demselben Gebiete  $n$ ter Stufe angehören, lassen sich als Zeuge einer Zahl mit dem Fläche der  $n$  ursprünglichen Einheiten darstellen.

**Beweis.** Unmittelbar nach 100.

**Satz.** Wenn ein Flach von Grösen erster Klasse Null ist, so herrscht zwischen den Grösen eine Hörigkeit. 102.

**Beweis.** Es sei  $[a_1 a_2 \cdots a_m] = 0$  das gegebene Flach, dessen Grösen  $a_1 \cdots a_m$  zu den  $n$  Einheiten  $e_1 \cdots e_n$  hörig seien. Angenommen nun, zwischen den Grösen  $a_1 \cdots a_m$  herrschte keine Hörigkeit, so könnte man nach Satz 23 zu den  $m$  Grösen  $a_1 \cdots a_m$  noch  $n-m$  Grösen  $a_{m+1} \cdots a_n$  hinzufügen der Art, dass die Einheiten  $e_1 \cdots e_n$  Vielfachenfummen der Grösen  $a_1 \cdots a_n$  wären. Führt man diese Vielfachenfummen in das Flach  $[e_1 e_2 \cdots e_n]$  ein und führt die Rechnung nach Satz 97 aus, so erhält man eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned} [e_1 e_2 \cdots e_n] &= \alpha [a_1 a_2 \cdots a_n], \text{ wo } \alpha \text{ eine Zahl ist,} \\ &= \alpha [(a_1 a_2 \cdots a_m)(a_{m+1} \cdots a_n)] &= & \text{(nach 4)} \\ &= \alpha [0(a_{m+1} \cdots a_n)] = 0 & \text{(nach Voraussetzung)} \end{aligned}$$

Dies aber widerspricht dem Satze 84; also ist die Annahme unmöglich, d. h. zwischen den Grösen herrscht eine Hörigkeit.

**Satz.** Sämtliche Sätze der Flachung bleiben bestehen, wenn man statt der ursprünglichen  $n$  Einheiten erster Klasse beliebige  $n$  gegenseitig freie zu den Einheiten hörige Grösen erster Klasse einführt. 103.

**Beweis.** Statt der ursprünglichen  $n$  Einheiten kann man nach Satz 24 beliebige  $n$  gegenseitig freie zu den Einheiten hörige Grösen als Einheiten einführen und sind alle Grösen, welche zu den ersten hörig sind, auch zu den letzten hörig. Für die neu eingeführten



Größen gilt ferner wie für die ursprünglichen Einheiten das Gesetz 81, dass 1) jedes Zeug, welches nur verschiedene Einheiten enthält, ungleich Null ist, (denn wäre es gleich Null, so müsste nach Satz 102 zwischen den Größen eine Hörigkeit herrschen) und dass 2)  $[Abc] + [Ac b] = 0$  ist, nach Satz 86. Es gilt also die Erklärung der Flachung, mithin gelten auch alle Gesetze der Flachung.

104. **Satz.** Wenn  $Z_b = S_{1,n}^b \alpha_a x_a$  und  $x_a = S_{1,n}^a \beta_c y_c$  auch  $Z_b = S_{1,n}^b \gamma_c y_c$  ist, so ist  ${}^b\gamma_c = {}^b\alpha_1 {}^1\beta_c + {}^b\alpha_2 {}^2\beta_c + \dots + {}^b\alpha_n {}^n\beta_c$

Beweis. Es ist  $Z_b = {}^b\alpha_1 x_1 + {}^b\alpha_2 x_2 + \dots + {}^b\alpha_n x_n$

$$x_a = {}^a\beta_1 y_1 + {}^a\beta_2 y_2 + \dots + {}^a\beta_n y_n$$

setzt man dies in erste Gleichung für  $Z_b$  ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} Z_b &= ({}^b\alpha_1 {}^1\beta_1 + {}^b\alpha_2 {}^2\beta_1 + \dots + {}^b\alpha_n {}^n\beta_1) y_1 \\ &+ ({}^b\alpha_1 {}^1\beta_2 + {}^b\alpha_2 {}^2\beta_2 + \dots + {}^b\alpha_n {}^n\beta_2) y_2 \\ &+ \dots \\ &+ ({}^b\alpha_1 {}^1\beta_n + {}^b\alpha_2 {}^2\beta_n + \dots + {}^b\alpha_n {}^n\beta_n) y_n \end{aligned}$$

es ist aber auch

$$Z_b = {}^b\gamma_1 y_1 + {}^b\gamma_2 y_2 + \dots + {}^b\gamma_n y_n$$

mithin ist

$${}^b\gamma_c = {}^b\alpha_1 {}^1\beta_c + {}^b\alpha_2 {}^2\beta_c + \dots + {}^b\alpha_n {}^n\beta_c$$

Der Satz lehrt das Flach umzuformen, wenn statt der ursprünglichen  $n$  Einheiten beliebige  $n$  gegenseitig freie zu den Einheiten hörige Größen als neue Einheiten eingeführt sind.

105. **Satz.** Wenn  $[Z_1 Z_2 \dots Z_n] = \mathcal{A}_\alpha^n \cdot [x_1 x_2 \dots x_n]$ ,

$$[x_1 x_2 \dots x_n] = \mathcal{A}_\beta^n [y_1 y_2 \dots y_n] \text{ und}$$

$$[Z_1 Z_2 \dots Z_n] = \mathcal{A}_\gamma^n [y_1 y_2 \dots y_n] \text{ ist,}$$

so ist  $\mathcal{A}_\alpha^n \cdot \mathcal{A}_\beta^n = \mathcal{A}_\gamma^n$ .

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} [Z_1 Z_2 \dots Z_n] &= \mathcal{A}_\alpha^n \cdot [x_1 x_2 \dots x_n] = \mathcal{A}_\alpha^n \mathcal{A}_\beta^n [y_1 y_2 \dots y_n] \\ &= \mathcal{A}_\gamma^n [y_1 y_2 \dots y_n] \text{ also } \mathcal{A}_\alpha^n \mathcal{A}_\beta^n = \mathcal{A}_\gamma^n \end{aligned}$$

Man nennt den Satz das Multiplikationstheorem für Determinanten. Man nennt  $\mathcal{A}_\alpha^n$  die Original-Determinante,  $\mathcal{A}_\gamma^n$  die transformirte Determinante,  $\mathcal{A}_\beta^n$  die Substitutions-Determinante oder den Modulus der Transformation.

106. **Satz.** Die Geschiedsfläche (multiplikativen Kombinationen) gegenseitig freier Größen sind auch gegenseitig frei oder

Die Gleichung  $\alpha A + \beta B + \dots = 0$ , wo  $\alpha, \beta \dots$  Zahlen,  $A, B \dots$



Geschiedsfläche gegenseitig freier Größen  $a_1 \cdots a_n$  sind, wird ersetzt durch die Gleichungsgruppe

$$\alpha = 0, \beta = 0, \dots$$

Beweis. Die Gleichung  $\alpha A + \beta B + \dots = 0$  flache man mit denjenigen der Größen  $a_1 \cdots a_n$ , welche in  $A$  fehlen, und sei  $A_1$  das Flach dieser Größen, so dass das Flach  $[AA_1] = [a_1 a_2 \cdots a_n]$ , dann erhält man  $\alpha[AA_1] + \beta[BA_1] + \dots = 0$ .

Hier sind  $A, B, C$  verschiedene Geschiedsfläche; es müssen also  $B, C \cdots$  jede mindestens eine der Größen enthalten, welche in  $A$  fehlt und welche also in  $A_1$  vorkommen. Jedes der Fläche  $[BA_1], [CA_1]$  enthält also dieselbe Gröse zweimal als Faktor und ist also nach Satz 92 Null.

Die obige Gleichung wird also  $0 = \alpha[AA_1] = \alpha[a_1 a_2 \cdots a_n]$ . Hier ist  $[a_1 a_2 \cdots a_n] \geq 0$  nach Satz 102, also ist  $\alpha = 0$  nach Zahlenlehre 175. Aus demselben Grunde sind  $\beta, \gamma \cdots$  Null, d. h. zwischen den Geschiedsflächen herrscht keine Hörigkeit.

**Satz.** Zwei Fläche von Größen erster Stufe, welche ungleich 107. Null sind, sind dann und nur dann deckend, wenn die aus ihren Größen erster Stufe ableitbaren Gebiete deckend sind, oder

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] \equiv [b_1 b_2 \cdots b_m] \text{ dann und nur dann, wenn stets}$$

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_m a_m = y_1 b_1 + y_2 b_2 + \cdots + y_m b_m$$

gesetzt werden kann, welche Werte auch entweder  $x_1 \cdots x_m$  oder  $y_1 \cdots y_m$  haben mögen.

Beweis. a. Angenommen, es sei das Gebiet  $a_1 \cdots a_m$  deckend mit dem Gebiete  $b_1 \cdots b_m$ . Dann können nach Satz 24 die Größen  $a_1 \cdots a_m$  als Vielfachensummen der Größen  $b_1 \cdots b_m$  dargestellt werden und ist dann nach Satz 101

$$[a_1 a_2 \cdots a_m] = \alpha [b_1 b_2 \cdots b_m], \text{ wo } \alpha \text{ eine Zahl ist.}$$

Die beiden Fläche sind dann also nach Satz 9 deckend, d. h.  $[a_1 \cdots a_m] \equiv [b_1 \cdots b_m]$ .

b. Angenommen, es seien die beiden Fläche deckend, d. h.  $[a_1 \cdots a_m] \equiv [b_1 \cdots b_m]$ , dann ist  $[a_1 \cdots a_m] = \alpha [b_1 \cdots b_m]$ . Flach man nun beide Seiten mit der Gröse  $b_1$ , so erhält man

$$[a_1 a_2 \cdots a_m b_1] = \alpha [b_1 b_2 \cdots b_m b_1] = 0 \quad (\text{nach Satz 92})$$

Also herrscht zwischen den Größen  $a_1 a_2 \cdots a_m b_1$  nach Satz 102 eine Hörigkeit und da die Größen  $a_1 \cdots a_m$  nach Satz 93 gegenseitig frei sind, da  $[a_1 \cdots a_m] \geq 0$ , so ist  $b_1$  zu den Größen  $a_1 \cdots a_m$  hörig oder eine Vielfachensumme der letztern. Aus gleichem Grunde sind aber auch  $b_2 \cdots b_m$  zu  $a_1 \cdots a_m$  hörig. Da aber  $[b_1 \cdots b_m] \geq 0$ , so sind



nach Satz 830 die Größen  $b_1 \cdot \cdot b_m$  gegenseitig frei. Wir haben also  $m$  gegenseitig freie Größen, welche zu  $m$  andern Größen  $a_1 \cdot \cdot a_m$  hörig sind und ist also das Gebiet der erstern Größen nach Satz 23 dem der letztern deckend.

Da zwei gleiche Größen immer in einer Zahlbeziehung zu einander stehen, so folgt aus dem Satze unmittelbar, dass zwei gleiche Fläche immer ein und dasselbe Gebiet haben, dem keine einfachen Fläche oder Faktoren angehören, und dass daher ausser diesem Gebiete nur noch der durch eine Zahl darstellbare messbare Wert gegeben zu sein braucht, damit der ganze Wert des Flaches genau bestimmt sei. Ist nämlich dann in dem Gebiete irgend ein Flach gegeben, aus dessen einfachen Flächen dasselbe ableitbar ist, so wird jedes andere Flach, aus dessen einfachen Flächen dasselbe Gebiet ableitbar ist, durch eine einfache Zahl bestimmt sein, welche das Verhältniss dieses Flaches zu jenem bestimmt.

108. **Erklärung.** Einfach heist eine Gröse  $m$ ter Klasse, wenn sie sich als ein Flach von  $m$  Größen erster Klasse darstellen lässt.

Das Gebiet dieser Gröse heist das aus ihren  $m$  Einheiten erster Klasse ableitbare Gebiet.

Uebergeordnet, untergeordnet, schneidend, getrennt heist eine einfache Gröse einer andern gegenüber, wenn ihre Gebiete so heissen.

Zusammengesetzt heist eine Gröse  $m$ ter Klasse, wenn sie sich nicht als ein Flach von  $m$  Größen erster Klasse darstellen lässt.

Als Beispiel einer zusammengesetzten Gröse kann man die Summe  $[ab] + [cd]$  anführen, wenn  $a, b, c, d$  vier gegenseitig freie Größen sind. Sollte nämlich  $[ab] + [cd]$  eine einfache Gröse, etwa  $= [fg]$  sein, so müsste  $[(ab + cd)(ab + cd)] = [fgfg] = 0$  sein (nach 92); aber  $[(ab + cd)(ab + cd)] = [abcd] + [cdab]$ , da  $[abab]$  und  $[cdcd]$  Null sind. Aber (nach 91) ist  $[abcd] = [cdab]$ . Also  $[(ab + cd)(ab + cd)] = 2[abcd]$ . Somit müsste, wenn  $[ab] + [cd]$  eine einfache Gröse wäre,  $[abcd] = 0$  sein, also (nach 102) zwischen  $a, b, c, d$  eine Hörigkeit herrschen, was wider die Voraussetzung ist.

109. **Satz.** Ein Flach aus  $m$  gegenseitig freien Größen erster Klasse ist eine einfache Gröse  $m$ ter Klasse und ist als Vielfachenfumme von Einheiten  $m$ ter Klasse darstellbar.

## 7. Die linige Aenderung der Größen erster Klasse.

Wir kommen nun zu den Aenderungen der Größen erster Klasse, welche erfolgen können, ohne den Wert der Fläche aus diesen Größen zu ändern.

110. **Erklärung.** Eine einfache linige Aenderung heist die Aenderung einer Gröse erster Klasse, wenn in einer Größenreihe statt einer Gröse die Summe dieser Gröse und eines Vielfachen ihrer Nachbargröse gesetzt wird, während die andern Größen unverändert bleiben oder



wenn in der Reihe  $\dots p, q \dots$  statt  $p, q$  nun  $p, q + \alpha p$  oder  $p + \alpha q, q$  gesetzt wird, wo  $\alpha$  eine beliebige Zahl ist.

Eine mehrfache linige Aenderung heist eine Aenderung, wenn in der Größenreihe wiederholt eine einfache linige Aenderung vorgenommen wird.

Satz.  $[Pa, (b + \alpha a)] = [Pa, b]$  111.

Ein Flach von Größen erster Klasse ändert seinen Wert nicht, wenn man zu einer Gröse deselben ein beliebiges Vielfaches einer andern Gröse deselben zufügt oder addirt oder

Das Flach einer Größenreihe wird durch linige Aenderung in seinem Werte nicht geändert.

Beweis. Es ist  $[Pa, (b + \alpha a)] = [Pa, b] + \alpha [Pa, a]$  (nach 76)  
 $= [Pa, b]$  (nach 92)

Satz. Man kann in einer Größenreihe statt einer Gröse die Summe 112. dieser Gröse und eines Vielfachen einer beliebigen andern Gröse jener Reihe setzen und zwar wird diese Umwandlung durch linige Aenderung bewirkt.

Beweis. Es sei die Reihe  $p_1, p_2, \dots p_n, q$ , ich will beweisen, dass man durch mehrfache linige Aenderung statt  $p_1$  die Summe  $p_1 + \alpha q$  setzen kann. Man nehme die folgenden Umwandlungen vor

$$\begin{aligned} & p_1, p_2, \dots p_{n-1}, p_n, q \\ & p_1, p_2, \dots p_{n-1}, p_n + \alpha q, q \\ & p_1, p_2, \dots p_{n-1} + p_n + \alpha q, p_n + \alpha q - \alpha q, q \\ & p_1, p_2, \dots p_{n-1} + p_n + \alpha q, p_n, q \\ & p_1, p_2, \dots p_{n-1} + p_n + \alpha q - p_n, p_n, q \\ & p_1, p_2, \dots p_{n-1} + \alpha q, p_n, q \end{aligned}$$

so folgt zuletzt  $p_1 + \alpha q, p_2, \dots p_{n-1}, p_n, q$

Satz. Man kann in einer Größenreihe zwei beliebige Größen 113. im umgekehrten Verhältnisse durch linige Aenderung ändern oder die Reihe  $\dots p \dots q$  lässt sich durch linige Aenderung in  $\alpha p \dots \frac{q}{\alpha}$  umwandeln.

Beweis. Wenn  $p$  und  $q$  unmittelbar auf einander folgen, so lässt sich durch linige Aenderung  $p, q$  in  $p, q + (\alpha - 1)p$ , dies in  $p + q + (\alpha - 1)p, q + (\alpha - 1)p$ , d. h. in  $\alpha p + q, q + (\alpha - 1)p$ , dies in  $\alpha p + q, q + (\alpha - 1)p - \frac{\alpha - 1}{\alpha}(\alpha p + q)$ , d. h. in  $\alpha p + q, \frac{q}{\alpha}$  und dies in  $\alpha p + q - \alpha \cdot \frac{q}{\alpha}, \frac{q}{\alpha}$ , d. h. in  $\alpha p, \frac{q}{\alpha}$  umwandeln. Zweitens:



Wenn  $p$  und  $q$  durch die Größen  $p_1, p_2, \dots, p_n$  getrennt sind, so kann man für  $p, p_1, p_2, \dots, q$  setzen  $\alpha p, \frac{p_1}{\alpha}, p_2, \dots, q$ , dann  $\alpha p, p_1, \frac{p_2}{\alpha}, \dots, q$  und endlich  $\alpha p, p_1, p_2, \dots, \frac{q}{\alpha}$ .

114. **Satz. Umkehr von 111.** Wenn zwei von Null verschiedene Fläche einander gleich sind, so lassen sich die einfachen Fläche des einen aus denen des andern durch linige Aenderung ableiten, oder wenn

$$[abc \dots m] = [ABC \dots M] \geq 0$$

so lässt sich die Größenreihe  $a, b, c, \dots, m$  in  $A, B, C, \dots, M$  durch linige Aenderung umwandeln.

Beweis. Nach 101 müssen die Gebiete von  $a, b, c, \dots, m$  und von  $A, B, C, \dots, M$  deckend oder identisch sein. Es müssen also die Größen  $A, B, C, \dots, M$  Vielfachensummen sein von  $a, b, c, \dots, m$ . In diesen Vielfachensummen darf die Vorzahl von einer dieser Größen, z. B. von  $a$  nicht in allen Ausdrücken gleichzeitig Null sein, denn sonst wären die  $m$  Größen  $A, B, C, \dots, M$  aus  $m - 1$  Größen  $b, c, \dots, m$  ableitbar, also würde nach 26 eine Hörigkeit zwischen ihnen herrschen, also ihr Flach nach 93 Null sein, was gegen die Annahme ist. Sei nun  $A$  die Gröse, in welcher die Vorzahl von  $A$  ungleich Null ist und sei

$$A = \alpha a + \beta b + \gamma c + \dots + \mu m \quad \text{wo also } \alpha \geq 0$$

ist, so kann ich nach 850 durch wiederholte linige Aenderung die Reihe

$$a, b, c, \dots, m \text{ in die Reihe } a + \frac{\beta}{\alpha}b + \frac{\gamma}{\alpha}c + \dots + \frac{\mu}{\alpha}m, b, c, \dots, m \text{ umwan-}$$

deln, d. h. in die Reihe  $\frac{A}{\alpha}, b, c, \dots, m$ . Diese kann man aber nach 113

in die Reihe  $A, b, c, \dots, \alpha m$  umwandeln.

## 8. Die Fläche der Größen höherer Klassen.

115. **Satz. Zwei einfache Größen höherer Klassen flacht man, indem man die Fläche erster Klasse der ersten fortschreitend mit denen der zweiten flacht, oder**

$$[(a_1 a_2 \dots)(b_1 b_2 \dots)] = [a_1 a_2 \dots b_1 b_2 \dots]$$

Beweis. Unmittelbar nach Satz 84.

Da für die Flachung nach 84 Einigung der Fläche gilt, so bedarf es nicht einer besonderen Erklärung für das Flach der Größen höherer Klassen.

116. **Satz. In einem Fläche kann man die Malklammern beliebig setzen oder weglassen oder**

$$\text{es ist } [A(BC)] = [ABC]$$

Beweis. Unmittelbar nach 84.



**Satz.** Wenn eine einfache GröÙe einer zweiten, welche nicht 117. Null ist, übergeordnet ist, so lässt sich die erstere als Flach der zweiten GröÙe mit einer dritten einfachen GröÙe darstellen oder wenn  $A > B$  und  $B \geq 0$  ist, so ist  $A = [BC]$

**Beweis.** Da  $A$  dem  $B$  übergeordnet, so ist nach 108 auch das Gebiet von  $A$  dem von  $B$  übergeordnet, d. h. jede GröÙe des zweiten auch eine GröÙe des ersten (nach 34 und 32). Es sei  $B = [b_1 b_2 \dots b_m]$ , wo  $b_1 b_2 \dots b_m$  GröÙen erster Klasse seien und  $B \geq 0$ , dann darf zwischen diesen GröÙen nach 93 keine Hörigkeit herrschen. Sei nun  $A = [a_1 a_2 \dots a_n]$ , so müssen die GröÙen  $b_1 b_2 \dots b_m$ , da sie dem Gebiete von  $a_1 a_2 \dots a_n$  angehören, zu diesen hörig sein, mithin kann man nach Satz 22 zu den GröÙen  $b_1 b_2 \dots b_m$  noch  $(n - m)$  GröÙen  $b_{m+1} \dots b_n$  hinzufügen der Art, dass die Gebiete  $a_1 a_2 \dots a_n$  und  $b_1 b_2 \dots b_n$  deckend sind. Dann aber sind auch die Fläche derselben nach 107 deckend. Es sei  $[a_1 a_2 \dots a_n] = \beta [b_1 b_2 \dots b_n] = \beta [(b_1 b_2 \dots b_m) (b_{m+1} \dots b_n)]$  Setzen wir demnach  $C = \beta [b_{m+1} \dots b_n]$ , so wird  $A = [BC]$

Zu bemerken ist hier noch, dass für die Fläche nach 821 auch das Beziehungsgeſetz gilt

$$[A(B \pm C)] = [AB] \pm [AC] \quad \text{und} \quad [(A \pm B)C] = [AC] \pm [BC]$$

und dass nach 828 auch das Geſetz der Vertauschung gilt, ſofern man das Zeichen richtig ſetzt, d. h. es ist  $[AB] = (-1)^{mn} [BA]$ , wenn die beiden Fläche  $m$ ter und  $n$ ter Klasse ſind.

$$\begin{aligned} \text{Satz.} \quad & \left( \sum_{a, b, c, \dots}^{\alpha} [a_a a_b a_c \dots] \right) \left( \sum_{m, n, o, \dots}^{\beta} [b_m b_n b_o \dots] \right) 118. \\ &= \sum_{a, b, c, \dots, m, n, o, \dots}^{\alpha \dots \beta \dots} [a_a a_b a_c \dots b_m b_n b_o \dots] \end{aligned}$$

**Beweis.** Unmittelbar nach 75 und 115.

Wir wollen nun die Fälle unterſuchen, in denen das Flach von GröÙen höherer Klasse Null wird.

**Satz.** Jedes Flach von GröÙen höherer Klasse, welches zwei 119. oder mehre gleiche Fache erster Klasse enthält, ist Null.

**Beweis.** Unmittelbar nach Satz 92.

**Satz.** Jedes Flach von GröÙen höherer Klasse, in welchem ein 120. Fach zu den andern Fachen erster Klasse hörig ist, ist Null.

**Beweis.** Unmittelbar nach Satz 93.

**Satz.** Wenn  $a_1 \dots a_m$  und  $b_1 \dots b_n$  GröÙen erster Klasse ſind, 121. welche gegenseitig frei ſind, und  $A$  eine Vielfachenſumme  $r$ ter Klasse der ersten  $m$ ,  $B$  eine  $s$ ter Klasse der zweiten  $n$  GröÙen, auch das Flach beider  $[A \cdot B] = 0$  ist, ſo ist eine der beiden Vielfachenſummen Null, d. h. entweder  $A = 0$  oder  $B = 0$ .



Beweis. Da  $A$  von  $r$ ter und  $B$  von  $s$ ter Klasse ist, so kann man  $A = S\alpha_a A_a$  und  $B = S\beta_b B_b$  setzen, wo  $A_a$  die Geschiedsfläche zur  $r$ ten Klasse aus  $a_1 \dots a_m$  und  $B_b$  die zur  $s$ ten Klasse aus  $b_1 \dots b_n$  darstellen, also ist

$$0 = [A \cdot B] = S\alpha_a \beta_b [A_a B_b] \quad (\text{nach 74 und 115})$$

wo  $[A_a B_b]$  als Geschiedsfläche von  $a_1 \dots a_m b_1 \dots b_n$  zu betrachten sind, welche nach 103 gegenseitig frei sind. Also ist nach 15  $\alpha_a \beta_b = 0$  für jedes  $a$  und  $b$ . Wenn nun die eine Gröse  $A \geq 0$ , d. h. wenn irgend eine der Zahlen  $\alpha_a \geq 0$  ist, so folgt  $\beta_b = 0$  für jedes  $b$ , d. h.  $B = 0$ , und ebenso folgt wenn  $B \geq 0$ , dass  $A = 0$  sei.

122. **Satz.** Wenn eine Summe  $S$  einfacher Grösen mit einer von Null verschiedenen Gröse erster Klasse  $a$  geflacht Null giebt, so ist die erste gleich einem Fläche, in welchem  $a$  ein Fach oder Faktor ist, oder wenn  $[aS = 0]$ , so ist  $S = [aP]$ .

Beweis. Es sei  $S$  eine Summe von Grösen  $m$ ter Klasse, und sei das Gebiet  $e_1 \dots e_n$ , dem sie angehören,  $n$ ter Stufe, so kann man nach 793 zu  $a$  noch  $m - 1$  freie Grösen erster Klasse  $a_2 \dots a_n$  hinzufügen der Art, dass beide Gebiete gleich oder deckend sind, dann lassen sich  $b_1 \dots b_n$ , also auch  $S$  als Vielfachensummen dieser  $n$  freien Grösen  $a_1 a_2 \dots a_n$  darstellen. Seien nun die Fläche, welche  $a$  enthalten,  $[aA_1]$ ,  $[aA_2] \dots$  seien die, welche  $a$  nicht enthalten  $B_1, B_2 \dots$  und sei

$$S = \alpha_1 [aA_1] + \alpha_2 [aA_2] + \dots + \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2 + \dots$$

$$\text{mithin } 0 = [aS] = \alpha_1 [aaA_1] + \alpha_2 [aaA_2] + \dots + \beta_1 [aB_1] + \beta_2 [aB_2] + \dots \\ = \beta_1 [aB_1] + \beta_2 [aB_2] + \dots \quad (\text{nach 92})$$

Hier sind da  $a$  nicht in  $B_1, B_2 \dots$  enthalten ist, die Grösen Geschiedsfläche, welche nach 103 gegenseitig frei sind, also sind nach 15 auch  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = 0$

$$\text{mithin ist } S = \alpha_1 [aA_1] + \alpha_2 [aA_2] + \dots \\ = [a(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots)] = [aP] \\ \text{wenn } P = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots$$

123. **Satz.** Wenn eine Summe  $S$  einfacher Grösen mit jeder von  $m$  freien Grösen erster Klasse  $a_1, \dots, a_m$  geflacht Null giebt, so lässt sich jene Summe  $S$  als ein Flach darstellen, in welchem  $a_1, \dots, a_m$  Fache oder Faktoren sind, oder wenn  $0 = [a_1 S] = [a_2 S] = \dots = [a_m S]$ , so ist  $S = [a_1 a_2 \dots a_m S_m]$ .

Beweis. Die ursprünglichen Einheiten seien  $e_1 \dots e_n$ , so kann man nach 23 zu den  $m$  Grösen  $a_1 \dots a_m$  noch  $n - m$  freie Grösen  $a_{m+1} \dots a_n$  hinzufügen der Art, dass die Gebiete von  $e_1 \dots e_n$  und von  $a_1 \dots a_n$  deckend sind, dann wird nach 122, da  $0 = [a_1 S]$  auch



$S = [a_1 P_1]$ . Hier werden alle die Fläche von  $[a_1 P_1]$ , wo  $a_1$  noch in  $P_1$  enthalten ist, nach 92 Null; man kann diese also weglassen und verwandle sich dadurch  $P_1$  in  $S_1$ , so ist  $S = [a_1 S_1]$ , wo  $S_1$  nur aus den Größen  $a_2 \dots a_n$  hervorgegangen ist und kein  $a_1$  enthält.

Da nun  $0 = a_2 S = [a_2(a_1 S_1)] = [a_2 a_1 S_1] = [a_1 a_2 S_1]$   
(nach 117 und 88)

so muss nach 121 entweder  $a_1$  oder  $[a_2 S_1]$  Null sein; das erste ist gegen die Annahme, also ist  $0 = [a_2 S_1]$ , mithin  $S_1 = [a_2 P_2]$  nach 122. Hier kann man wieder in  $P_2$  alle Fläche weglassen, welche  $a_2$  enthalten und verwandle sich dadurch  $P_2$  in  $S_2$ , so ist  $S_1 = [a_2 S_2]$ , mithin  $S = [a_1 a_2 S_2]$  und so fort zuletzt  $S [a_1 a_2 \dots a_m S_m]$ .

**Satz.** Wenn eine Summe  $S$  von Größen  $m$ ter Klasse mit jeder 124. von  $m$  freien Größen erster Klasse geflacht Null giebt, so ist  $S$  mit dem Fläche dieser  $m$  Größen deckend oder wenn

$0 = [a_1 S] = [a_2 S] = \dots = [a_m S]$ , so ist  $S = \alpha [a_1 a_2 \dots a_m]$ .

Beweis. Unmittelbar aus 123.

**Satz.** Wenn eine Summe  $S$  von Größen  $m$ ter Klasse mit 125.  $m + 1$  Größen erster Klasse  $a_1 \dots a_{m+1}$  geflacht Null giebt, so ist entweder  $S$  oder  $[a_1 \dots a_{m+1}]$  gleich Null oder wenn  $0 = [a_1 S] = [a_2 S] = \dots = [a_{m+1} S]$ , so ist entweder  $S = 0$  oder  $[a_1 \dots a_{m+1}] = 0$ .

Beweis. Angenommen, es sei  $[a_1 a_2 \dots a_{m+1}] \gtrless 0$ , so ist auch  $[a_1 \dots a_m] \gtrless 0$ , also sind  $a_1 \dots a_m$  gegenseitig frei, also da  $0 = [a_1 S] = \dots = [a_m S]$ , so ist nach 124 auch  $S = \alpha [a_1 a_2 \dots a_m]$ , da ferner  $0 = [a_{m+1} S] = \alpha [a_1 a_2 \dots a_{m+1}]$  mithin, da  $[a_1 a_2 \dots a_{m+1}] \gtrless 0$ , so ist  $\alpha = 0$ , also auch  $S = \alpha [a_1 \dots a_m] = 0$ , d. h. es ist entweder  $S = 0$  oder  $[a_1 \dots a_{m+1}] = 0$ .



## Dritter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Modlungslehre.

### 9. Die grundlegenden Gesetze der Modlungslehre.

Wir haben bereits in der Gebietslehre gesehen, welche überaus grose Uebereinstimmung die Gesetze über die Gebiete in der Gebietslehre mit den Gesetzen der Begriffe in der Logik zeigen. Auch in der Modlungslehre wird uns eine überraschende Aehnlichkeit in den Ideen der Lehre vom Hauptgebiete und von der Ergänzung eines Flachs zum Hauptgebiete entgegentreten, und werden uns diese Begriffe ebenso in der Ausdehnungslehre, wie in der Logik zu den reichsten Sätzen führen.

Von der Flachungslehre muss diese Modlungslehre streng geschieden werden, wenn man nicht in die grösten Verwirrungen geraten will. Ich werde bei den einzelnen Sätzen in den Anmerkungen auf die überaus grossen Unterschiede der beiden Rechnungsarten aufmerksam machen und dieselben strenge scheiden.

126. **Erklärung.** Das Hauptgebiet heist in der Modlungslehre das Gebiet der Einheiten erster Klasse, zu welchem alle der Betrachtung unterworfenen Grösen hörig sind. Das Zeug oder Produkt aller der Einheiten erster Klassen dieses Gebietes wird in der Modlungslehre gleich eins gesetzt, d. h. es ist  $[e_1 \cdots e_n] = 1$ . Das  $n$  oben am Flachzeichen bezeichnet die Stufe des Hauptgebietes. Das Flach heist in der Modlungslehre ein Modelflach oder ein Enflach.

In der Flachungslehre ist  $[e_1 e_2 \cdots e_n]$  eine Gröse  $n$ ter Klasse, dagegen 1 eine Gröse nullter Klasse, beide mithin ganz verschieden; dagegen wird in der Modlunglehre  $[e_1 e_2 \cdots e_n] = 1$  gesetzt, d. h. gleich einem Flache nullter Stufe. Wir werden bei N 133 sehen, aus welchen Gründen wir zu dieser Setzung kommen mussten.



**Erklärung.** Die Ergänzung einer Einheit m ter Klasse  $E$  127. heist das Flach aller in jener Einheit m ter Klasse nicht vorkommenden Einheiten erster Klasse des Hauptgebietes, sofern das Flach der Einheit m ter Klasse und ihrer Ergänzung gleich eins ist. Die Ergänzung einer Zahl setzen wir der Zahl gleich.

Das Zeichen der Ergänzung einer Gröse ist ein über die Gröse gesetzter wagerechter Strich, also  $\overline{E}$  gelesen „Nicht  $E$ “ oder „Ergänzt  $E$ “, bei einer Klammer ein mit der Klammer verbundener wagerechter Strich  $\overline{[}$  gelesen „Nichtklammer“.

Es ist zweckmässig, sich an einigen Beispielen den Begriff der Ergänzung einer Gröse klar zu machen.

Im Gebiete zweiter Stufe  $a_1 a_2 = 1$  ist  $\overline{a_1} = a_2$ ,  $\overline{a_2} = -a_1$ ; denn es ist  $a_1 a_2 = 1$ ,  $a_2 a_1 = -1$ .

Im Gebiete dritter Stufe  $a_1 a_2 a_3 = 1$  ist  $\overline{a_2} = -a_1 a_3 = a_3 a_1$ ,  $\overline{a_1} = a_2 a_3$ ,  $\overline{a_3} = a_1 a_2$ , ferner  $\overline{[a_1 a_3]} = -a_2$ ,  $\overline{[a_3 a_1]} = a_2$ ,  $\overline{[a_1 a_2]} = a_3$ ,  $\overline{[a_2 a_1]} = -a_3$ ,  $\overline{[a_2 a_3]} = a_1$ ,  $\overline{[a_3 a_2]} = -a_1$ .

In H. Grassmann Ausdehnungslehre von 1862 ist der Ergänzung von  $E$  das Zeichen  $\text{!}E$  gegeben. Ich habe dies Zeichen aufgegeben und dafür das Zeichen  $\overline{E}$  eingeführt und zwar aus folgenden Gründen. Der Begriff des Nicht- $E$  oder der Ergänzung von  $E$  ist uralt und zuerst von Aristotélēs in die Begriffslehre eingeführt, er unterscheidet bereits *perì hermēneías* c10 den Menschen den *ánthrōpos* und den Nichtmenschen, den *ouk ánthrōpos*. Er versteht darunter bereits ganz wie in unserer Erklärung alle die Grösen, welche in dem Selbstbegriffe nicht enthalten sind. In der Logik hat man nun bereits längst für diesen Begriff das Zeichen  $\overline{E}$  gelesen „Nicht  $E$ “ eingeführt, wo der Strich über dem Buchstaben an das Minuszeichen erinnert, aber so mit dem Zeichen der Gröse  $E$  verwachsen ist, dass er mit dem Buchstaben eine Einheit bildet, und also unzweifelhaft nur das Zeichen einer Gröse ist.

Das Zeichen  $\text{!}E$ , welches in H. Grassmann Ausdehnungslehre 1862 eingeführt ist, ist meiner Ansicht nach weniger zu empfehlen. Nicht nur ist das Zeichen  $\overline{E}$  geschichtlich viel früher eingeführt, sondern es ist auch ganz unzweideutig; das Zeichen  $\text{!}E$  dagegen giebt notwendig zu Verwirrungen Anlass. Wenn z. B. das Flach  $[E \text{!} E]$  geschrieben wird, so nimmt hier das Zeichen  $\text{!}$  zwischen den beiden Buchstaben unzweifelhaft die Stelle eines Knüpfungszeichens ein. Noch schlimmer ist das Zeichen  $\text{!}A$  oder  $[A \text{!} A]$ , wo das  $\text{!}$  als das Zeichen einer eigenen zu flachenden Gröse erscheint. Ich halte mich daher berechtigt, das Zeichen  $\overline{E}$  einzuführen, welches alle diese Zweifel beseitigt.

**Satz.**  $\overline{[\overline{E} \overline{E}]} = 1$  128.

Das Modellflach einer Einheit mit ihrer Ergänzung ist Eins.

**Satz.**  $\overline{\overline{E}} = E$ ; dagegen  $\overline{\overline{\overline{E}}} = -E$ , wenn  $E$  ungerader 129. Klasse im Hauptgebiet gerader Stufe ist. Die Ergänzung der Ergänzung einer Einheit  $E$  (d. h.  $\overline{\overline{E}}$  gelesen Nichtnicht  $E$ ) ist im Allgemeinen



dieser Einheit gleich, dagegen ist sie dieser Einheit entgegengesetzt, wenn gleichzeitig die Stufe des Hauptgebietes gerade und die Klasse der Einheit  $E$  ungerade ist.

Beweis. Es sei  $E$  die Einheit und die Stufe des Hauptgebietes  $n$ . Nach 126 ist  ${}^n[E\bar{E}] = 1$  und ebenso  ${}^n[\bar{E}\bar{E}] = 1$ . Also ist  ${}^n[E\bar{E}] = {}^n[\bar{E}\bar{E}] = (-1)^{m(n-m)}{}^n[\bar{E}\bar{E}]$  nach 89. Mithin ist  $\bar{\bar{E}} = (-1)^{m(n-m)}E$ .

Hier ist, wenn  $n$  gerade ist, eine von den Zahlen  $m$  und  $n - m$  gerade, mithin  $(-1)^{m(n-m)} = +1$ . Wenn  $n$  gerade und zugleich  $m$  gerade ist, so ist gleichfalls  $(-1)^{m(n-m)} = +1$ . Nur in dem Falle, wenn  $n$  gerade und zugleich  $m$  ungerade ist, sind beide Zahlen  $m$  und  $n - m$  ungerade, nur in diesem Falle ist  $(-1)^{m(n-m)} = -1$ . Es folgt mithin der Satz.

130. **Erklärung.** Die Ergänzung einer beliebigen Gröse  $A$  heist die Gröse  $\bar{A}$  (gelesen Nicht  $A$ ), welche man erhält, wenn man  $A$  als Vielfachensumme aus den Einheiten darstellt, und statt jeder dieser Einheiten ihre Ergänzung setzt, oder

$$\bar{A} = (\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots) = \alpha_1 \bar{E}_1 + \alpha_2 \bar{E}_2 + \dots$$

wo  $E_1, E_2 \dots$  Einheiten beliebiger Klassen sind.

Es ist hier darauf aufmerksam zu machen, dass bei der Modlung nicht mehr  ${}^n[A\bar{A}] = 1$  gilt.

131. **Satz.** Die Klasse der Ergänzung einer Gröse  $m$ ter Klasse im Hauptgebiete  $n$ ter Stufe ist  $n - m$ .

132. **Satz.**  $\bar{\bar{A}} = A$ ; dagegen  $\bar{\bar{A}} = -A$ , wenn  $A$  ungerader Klasse im Hauptgebiet gerader Stufe ist.

Die Ergänzung der Ergänzung einer Gröse  $A$  (d. h.  $\bar{\bar{A}}$  gelesen Nichtnicht  $A$ ) ist dieser Gröse  $A$  im Allgemeinen gleich; doch ist sie dieser Gröse  $A$  entgegengesetzt, wenn zugleich das Hauptgebiet von gerader Stufe und die Gröse  $A$  von ungerader Klasse ist.

Beweis. Es sei  $A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots$ , so ist nach 130  $\bar{A} = \alpha_1 \bar{E}_1 + \alpha_2 \bar{E}_2 + \dots$  mithin  $\bar{\bar{A}} = \alpha_1 \bar{\bar{E}}_1 + \alpha_2 \bar{\bar{E}}_2 + \dots = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots = A$  nach 129, sofern nicht zugleich das Hauptgebiet von gerader Stufe und die Gröse  $A$  von ungerader Klasse ist, dagegen ist in letztem Falle

$$\begin{aligned} \bar{\bar{A}} &= \alpha_1 \bar{\bar{E}}_1 + \alpha_2 \bar{\bar{E}}_2 + \dots = \alpha_1 (-E_1) + \alpha_2 (-E_2) + \dots \\ &= -(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots) = -A. \end{aligned}$$

Wir kommen nun zu der Erklärung des Modellflaches und der Modellsomme, welche die Base für die ganze Modlungslehre bildet.



**Erklärung.** Das **Modelflach** oder **Enflach** heist ein fort- 133. schreitendes, wenn die Summe aus den Klassen der Einheiten kleiner ist als die Stufe ihres Hauptgebietes  $n$ .

Das **Modelflach** heist ein stehendes, wenn die Summe aus den Klassen der Einheiten gleich der Stufe des Hauptgebietes  $n$  ist.

Das **Modelflach** heist ein rückschreitendes oder eingewandtes, wenn die Summe aus den Klassen der Einheiten grösser ist als die Stufe des Hauptgebietes  $n$ .

Das fortschreitende **Modelflach** oder **Enflach** der Einheiten ist gleich dem gewöhnlichen **Flach** der Einheiten.

Das stehende **Modelflach** der Einheiten ist gleich  $\pm 1$ .

Das rückschreitende **Modelflach** der Einheiten ist gleich der Gröse, deren Ergänzung das gewöhnliche **Flach** der Ergänzungen jener Einheiten ist oder für welches  $\overline{[EF]} = [\overline{E}\overline{F}]$  ist, d. h. für welches das **Nichtenflach** das **Flach** der **Nichte** ist.

Das Zeichen des **Modelflaches** oder **Enflaches** im Hauptgebiete  $n$  ter Stufe ist  $\overline{[EF]}$  gelesen „**Enflach EF**.“

Es ist wichtig, dass man sich diese Erklärung wieder an Beispielen klar mache und auf den grossen Unterschied des **Modelflaches** vom gewöhnlichen **Flache** achte.

Nur das fortschreitende **Modelflach** ist gleich dem gewöhnlichen **Flache**.

Das stehende **Modelflach** ist  $\pm 1$ , also eine Zahl nullter Klasse; dagegen ist das gewöhnliche **Flach** in diesem Falle  $\pm [e_1 e_2 \dots e_n]$ , d. h. eine Gröse  $n$  ter Klasse.

Das rückschreitende **Modelflach** von zwei Einheiten  $E$  und  $F$  ist die Gröse, für welche  $\overline{[EF]} = [\overline{E}\overline{F}]$  ist, dagegen ist das gewöhnliche **Flach** dieser Grösen Null.

Seien z. B. im Gebiete dritter Stufe  $E = e_1 e_2$  und  $F = e_1 e_3$ , so ist  $[(e_1 e_2)(e_1 e_3)] = 0$  (nach 92.) Dagegen ist für das **Modelflach**  $\overline{[e_1 e_2]} = e_3$ ,  $\overline{[e_1 e_3]} = -e_2$ , mithin

$\overline{[EF]} = [\overline{E}\overline{F}] = [e_3 \cdot -e_2] = [e_2 e_3]$ , also  $\overline{[EF]} = e_1$  also eine Gröse erster Klasse.

So ist das **Flach**  $[(e_1 e_2 e_4)(e_1 e_3 e_4)] = 0$ , dagegen ist für das **Modelflach** im Gebiete 4ter Stufe  $\overline{[e_1 e_2 e_4]} = -e_3$  und  $\overline{[e_1 e_3 e_4]} = e_2$ , mithin

$\overline{[EF]} = [\overline{E}\overline{F}] = [(-e_3) \cdot e_2] = [e_2 e_3]$ , also  $\overline{[EF]} = e_1 e_4$ .

Es wird zweckmässig sein, sich durch einige Uebungen diesen Unterschied klar zu machen.

Auch die Gesetze der Webung oder Multiplikation sind für die Modlung ganz andere als für die Flachung. Denn nach 84 gilt für die Flachung Einigung der Fache oder Faktoren; dagegen gilt diese für die Modlung nicht; denn gälte sie, so wäre  $\overline{[(e_1 e_2)(e_1 e_3)]} = \overline{[e_1 e_2 e_1 e_3]} = 0$ , während doch  $\overline{[(e_1 e_2)(e_1 e_3)]} = e_1$



fein muss. Für die Modlung gilt also zunächst nur das Beziehungsgezet Satz 74 und 75, nicht mehr das Gefetz der Einigung.

In der Ausarbeitung von 1847 hatten H. und R. Grassmann diese Multiplikation die bezügliche Multiplikation genannt.

In H. Grassmann Ausdehnungslehre 1862 ist das Modellflach ein auf das Hauptgebiet bezügliches Flach genannt. Dieser Ausdruck erscheint mir zweideutig. Man könnte dadurch verleitet werden, die Gefetze der Flachung auch für die Modlung oder bezügliche Flachung anzuwenden und käme dadurch in die schlimmste Verwirrung. Ich halte es daher für notwendig, diese neue Art der Multiplikation auch mit einem neuen Namen und mit einem neuen Zeichen zu bezeichnen und nenne sie daher Modlung, das Zeug oder Produkt ein Modellflach oder für das Hauptgebiet nter Stufe ein Enflach.

Wir können nun zu der Betrachtung übergehen, was uns veranlasst hat, diese ganz neuen, von der Flachung wesentlich abweichenden und auf den ersten Blick verwirrenden Erklärungen einzuführen. Es wird uns dies Gelegenheit geben, die Idee des Modellflaches klar zu legen und in das begriffliche Verständniss dieses Zweiges einzuführen.

Der eigentliche Grundbegriff dieses Abschnittes ist der der Ergänzung zu einem Hauptgebiete nter Stufe, ein Begriff, welcher der Logik und der Ausdehnungslehre gemeinam ist und in beiden Zweigen der Denklehre die reichsten Anwendungen zulässt.

Wollen wir aber diesen Begriff in der Ausdehnungslehre anwenden können, so müssen wir notwendig auch das Zeug oder Produkt zweier Ergänzungen bilden können. Legen wir z. B. ein Gebiet fünfter Stufe  ${}^n[e_1e_2e_3e_4e_5] = 1$  als Hauptgebiet zu Grunde und setzen wir  $E = [e_1e_2]$ ,  $F = [e_3e_4]$ , so ist  $\bar{E} = [e_3e_4e_5]$  und ist  $\bar{F} = [e_1e_2e_5]$ , mithin wird das Zeug oder Produkt  ${}^n[\bar{E}\bar{F}] = {}^n[e_3e_4e_5][e_1e_2e_5]$ . Dies Produkt wäre nun nach den Gefetzen der Flachung Null, da  $e_5 \cdot e_5 = \text{Null}$  ist, es wäre mithin unmöglich, ein Produkt der Nichte zu bilden, wenn man die Gefetze der Flachung ganz allgemein weiter gelten lassen wollte. Beachtet man aber, dass  ${}^n[e_3e_4e_5][e_1e_2e_5] = [e_1e_2e_3e_4e_5]e_5$  ist und setzt man hier  ${}^n[e_1e_2e_3e_4e_5] = 1$ , so ergibt sich  ${}^n[\bar{E}\bar{F}] = e_5$ , d. h. da  ${}^n[EF] = [e_1e_2e_3e_4]$  ist, so ist die Ergänzung zu  ${}^n[e_1e_2e_3e_4]$  gleich  $e_5$ , d. h. es ist das Flach der Nichte gleich dem Nicht-Enflach  ${}^n[\bar{E}\bar{F}] = \bar{[EF]}$ .

Wir haben in diesem Enflache nun ein Produkt von Grösen kennen gelernt, welche in einem Gebiete nter Stufe, mehr als n Grösen als Fache oder Faktoren enthalten, nämlich auser den n Grösen des Gebietes noch eine oder mehrere Grösen des Gebietes und wir haben dies Produkt, indem wir das Produkt der n Grösen des Gebietes  ${}^n[e_1e_2 \dots e_n]$  gleich 1 setzten, dem Produkte der einen oder den mehren Grösen des Gebietes gleich gesetzt, welche dann noch übrig blieben. Hieraus ergeben sich dann alle Festsetzungen der obigen Erklärung und daraus die folgenden Gefetze der Modlungslehre.

Für die Ergänzung gilt hier  ${}^n[E\bar{E}] = 1$  und  ${}^n[A\bar{A}] = 1$ , während in der Logik  $E + \bar{E} = 1$  und  $A + \bar{A} = 1$  ist. Es folgert dieser Unterschied einfach aus den verschiedenen Erklärungen der beiden Wissenschaften.



**Erklärung.** Die Modelfumme der Klassen  $\alpha, \beta, \gamma$  der Fache 134. oder Faktoren heist die Zahl  $\varrho$ , welche kleiner ist als die Stufe des Hauptgebietes  $n$ , wenn  $\alpha + \beta + \gamma = an + \varrho$  oder es ist  $\alpha + \beta + \gamma = an + {}^n(\alpha + \beta + \gamma)$ .

Wenn die Modelfumme der Klassen gleich Null ist, so kann man das Flach sowohl als fortschreitend, wie als rückschreitend betrachten.

Das Zeichen der Modelfumme für ein Hauptgebiet  $n$ ter Stufe ist  ${}^n(\alpha + \beta + \dots)$  gelesen „die Enfumme von  $\alpha + \beta + \dots$ “

Beispiele  ${}^3(2 + 2 + 1) = 2$ ,  ${}^4(3 + 2 + 3) = 0$ ,  ${}^4(2 + 3 + 2) = 3$ .

Wir wenden uns nun zunächst zu der Betrachtung der fortschreitenden, der stehenden und der rückschreitenden Modellfläche und demnächst zu den allgemeinen Gesetzen über die Modlung.

**Satz.** Zwei einfache Größen  $A$  und  $B$ , bei denen die Summe 135. ihrer Klassen  $\alpha + \beta$  die Stufe des Hauptgebietes  $n$  um  $\gamma$  übertrifft, lassen sich in der Form darstellen  $A = [CA_1]$  und  $B = [CB_1]$ , wo  $C$  eine einfache Gröse der Klasse  $\gamma$  darstellt.

**Beweis.** Nach der Bedingung ist  $\alpha + \beta = n + \gamma$ , also ist nach 30 den Gebieten von  $A$  und  $B$  ein Gebiet der Stufe  $\gamma$  gemein. Sei nun  $C$  eine Gröse der Klasse  $\gamma$ , so ist  $C$  sowohl dem  $A$  als dem  $B$  untergeordnet, also ist nach 117 auch  $A$  in der Form  $[CA_1]$  und  $B$  in der Form  $[CB_1]$  darstellbar.

**Satz.** Die Summe von einfachen Größen  $(n - 1)$ ter Klasse in 136. einem Hauptgebiete  $n$ ter Stufe ist wieder eine einfache Gröse  $(n - 1)$ ter Klasse.

**Beweis.** Es seien zwei einfache Größen  $(n - 1)$ ter Klasse  $A$  und  $B$  gegeben, so ist die Summe ihrer Klassen  $2n - 2$ , mithin haben sie nach 135 eine einfache Gröse  $C$  von  $2n - 2 - n = n - 2$ ter Klasse gemeinsam und sind also nach 135 in der Form  $A = [Ca]$  und  $B = [Cb]$  darstellbar, wo  $a$  und  $b$  einfache Größen erster Klasse, mithin  $a + b$  wieder eine einfache Gröse erster Klasse ist; folglich ist  $A + B = [Ca + Cb] = [C(a + b)]$  (nach 84) ein Flach von  $n - 1$  Größen erster Klasse, d. h. eine einfache Gröse  $(n - 1)$ ter Klasse. Mithin gilt der Satz fortschreitend für die Summe von beliebig vielen einfachen Größen  $(n - 1)$ ter Klasse.

Es ist hier wohl zu beachten, dass nur die Größen erster und die  $(n - 1)$ ter Klasse eine einfache Gröse und zwar gleicher Klasse zur Summe haben. Schon 2 Größen zweiter Klasse haben nur dann eine einfache Gröse zweiter Klasse zur Summe, wenn ihre 4 Größen erster Klasse nicht gegenseitig frei, sondern eine zu



den andern hörig ist. Soll nämlich  $S = ab + cd$  ein Flach sein, so muss nach 92  $[SS] = 0$  sein, also  $0 = [SS] = [(ab + cd)(ab + cd)] = [abcd + cdab]$  da  $[abab] = [cdcd] = 0$  nach 92. Aber nach 91 auch  $[cdab] = [abcd]$ , mithin  $0 = 2[abcd]$ , oder  $[abcd] = 0$ , mithin nach 98 eine der Grösen zu den andern hörig; dagegen kann dann  $S$  nicht eine einfache Gröse sein, wenn die 4 Grösen gegenseitig frei sind.

Daselbe folgt auch, wenn man das gemeinfame Gebiet auffucht, daselbe ist  $\gamma = 4 - n$ . Ist hier  $n = 3$ , so ist  $\gamma = 1$  und folgt der Satz aus 129, ist dagegen  $n > 3$ , so ist die Summe eine zusammengesetzte Gröse.

137. **Satz.** Das stehende Modellflach ist gleich  $\pm 1$ , d. h. eine Gröse 0 ter Klasse.

Beweis. 1. Unmittelbar nach Erklärung 133.

2. Sei  $[AB]$  ein stehendes Modellflach, und  $\alpha$  und  $\beta$  die Klassen von  $A$  und  $B$ , so ist nach 133  $\alpha + \beta = n$ , die Klassen der Ergänzungen sind  $n - \alpha$  und  $n - \beta$ , also die Summe  $2n - (\alpha + \beta) = n$ , d. h.  $[AB]$  nach 133 ein stehendes Modellflach.

138. **Satz.**  $\bar{E} = [EFF]$ , wo  $F$  das Flach der Einheiten von  $\bar{E}$ . Wenn eine Gröse  $F$  das Flach ist aller in einer Einheit beliebiger Klasse  $E$  nicht vorkommender Einheiten erster Klasse des Hauptgebietes, so ist  $\bar{E} = [EFF]$ .

Beweis. Nach 137 ist  $[EF] = \pm 1$ , also ist  $[E(EFF)] = [E(\pm 1)F] = (\pm 1)[EF] = (\pm 1)(\pm 1) = 1$  (nach 67)

Ebenso ist  $[E\bar{E}] = 1$ , mithin ist  $[E\bar{E}] = [E(EFF)]$ , also ist auch  $\bar{E} = [EFF]$ .

Es bietet uns dieser Satz wieder ein sehr schlagendes Beispiel, dass die Gesetze der Einigung nicht gelten; denn es ist, wie im Satze bewiesen  $[EFF] = \bar{E}$ ; dagegen ist  $[E(FF)] = 0$ , indem hier  $FF = 0$  nach Satz 92, mithin  $[E(FF)] = [E \cdot 0] = 0$ .

139. **Satz.** Für die rückschreitenden Modellflache ist  $\bar{[EF]} = [\bar{E}\bar{F}]$  oder die Ergänzung des rückschreitenden Modellflaches zweier Einheiten ist das Flach der Ergänzungen der Einheiten.

Beweis. Unmittelbar nach Erklärung 133.

140. **Satz.** Die Modellsumme eines Modellflaches ist gleich dem Reste, der bleibt, wenn man die Summe der Klassen der Fache oder Faktoren durch die Stufe  $n$  des Hauptgebietes teilt oder

$$\alpha + \beta \dots = an + {}^n(\alpha + \beta + \dots).$$



**Satz.** Für die Modellfläche gilt das Beziehungsgefetz Satz 74 141. und 75.

**Satz.** Das Enflach zweier Grösen, welche Fläche von Einheiten erster Gröse sind, ist dann und nur dann ungleich Null, wenn in dem Enflache keine Einheit erster Klasse des Hauptgebietes 2 mal öfter als Fach oder Faktor vorkommt, als irgend eine andere Einheit erster Klasse des Hauptgebietes. 142.

Beweis. 1. Wenn in dem Enflache  $[AB]$  irgend eine Einheit erster Klasse des Hauptgebietes als Fach oder Faktor in dem Enflache fehlt, so können nicht die  $n$  Fache  $[e_1 e_2 \dots e_n] = 1$  in dem Enflache enthalten sein. Diese  $n$  Fläche können dann also aus dem Produkte  $[AB]$  nicht ausscheiden, es bleiben mithin in diesem Falle in dem Produkte  $[AB]$  zwei gleiche Fache oder Faktoren, und das Produkt ist also nach Satz 92 Null.

2. Wenn dagegen in dem Enflache  $[AB]$  jede Einheit erster Klasse des Hauptgebietes als Faktor nur einmal enthalten ist, so ist das Flach nach Satz 82  $\geq 0$ . Ebenso wenn in dem Enflache  $[AB]$  sämtliche Einheiten erster Klasse des Hauptgebietes wenigstens einmal enthalten sind, so ist zunächst das Enflach  $[e_1 e_2 \dots e_n] = 1$  und bleibt nur noch das Enflach der Einheiten erster Klasse, welche in dem Enflache beider Grösen zweimal vorkommen, d. h. welche den beiden Grösen A und B gemeinam sind. Die Ergänzung dieses Enflaches ist dann das Flach aus den Einheiten erster Klasse des Hauptgebietes, welche den beiden Grösen A und B nicht gemeinam sind.

**Satz.** Für die fortschreitenden Modellfläche gelten alle Gefetze 143. der Flachung, namentlich auch der Satz 84 und das Enflach ist gleich dem Fläche.

Beweis. Unmittelbar nach Erklärung 133.

**Satz.** Wenn das Modellflach zweier Grösen fortschreitend ist, 144. so ist das ihrer Ergänzungen rückschreitend und umgekehrt.

Beweis. Wenn  $[AB]$  ein fortschreitendes Modellflach ist, und  $\alpha$  und  $\beta$  die Klassen sind, so ist  $\alpha + \beta < n$  (nach 133); dann ist für die Ergänzungen  $(n - \alpha) + (n - \beta) = 2n - (\alpha + \beta) > n$ , mithin nach 133  $[\overline{AB}]$  ein rückschreitendes Flach. Ebenso umgekehrt.

## 10. Die allgemeinen Sätze für Enfläche.

Die Sätze sind im Folgenden zunächst für die drei Fälle zu beweisen, dass das Modellflach ein fortschreitendes, ein stehendes, oder ein rückschreitendes ist, oder mit andern Worten, dass  $\alpha + \beta < n$ , dass  $\alpha + \beta = n$  und dass  $\alpha + \beta > n$  sei. Wir setzen dabei in allen Sätzen dieser Nummer die Stufe des Hauptgebietes



gleich  $n$ , die Klasse von  $A$  gleich  $\alpha$ , die von  $B$  gleich  $\beta$ , die von  $C$  gleich  $\gamma \dots$ , die von  $R$  gleich  $\varrho$ . Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir nun zur Entwicklung der Sätze.

145. **Satz.** Die Klasse des Enflachs zweier Größen, welches  $\geq$  Null ist, ist gleich der Enfumme ihrer Klassen, oder wenn  $\gamma, \alpha, \beta$  die Klassen und  $C = [^nAB]$ , so ist  $\gamma = (^n\alpha + \beta)$ .

Beweis. 1. Wenn  $\alpha + \beta < n$ , so ist  $[^nAB]$  ein fortschreitendes Modellflach, also die Klasse von  $C = [^nAB]$  gleich der Klasse von  $[AB]$ , d. h.  $\gamma = \alpha + \beta$ .

2. Wenn  $\alpha + \beta = n$ , so ist  $[^nAB] = \pm 1$  nach 137, und also nullter Klasse, d. h.  $\gamma = (^n\alpha + \beta)$ .

3. Wenn  $\alpha + \beta > n$ , so ist  $\bar{C} = \bar{[AB]} = [^n\bar{A}\bar{B}]$  nach 139. Hier ist die Klasse von  $\bar{A}$  nach 131 gleich  $n - \alpha$ , die von  $\bar{B} = n - \beta$ , die von  $\bar{C} = n - \gamma$ , also

$$n - \gamma = n - \alpha + n - \beta = n - (\alpha + \beta - n) \text{ d. h. } \gamma = \alpha + \beta - n = (^n\alpha + \beta).$$

Somit gilt der Satz für den Fall, dass  $A, B$  und  $[^nAB]$  Einheiten beliebiger Klassen sind. Da aber jede Vielfachenfumme dieser Einheiten mit ihren Einheiten gleicher Klasse ist, so gilt er auch für beliebige Größen.

146. **Satz.** Die Klasse des Enflachs mehrerer Größen, welches ungleich Null ist, ist gleich der Enfumme ihrer Klassen, oder

$$\text{Wenn } R = [^nABC\dots], \text{ so ist } \varrho = (^n\alpha + \beta + \gamma + \dots)$$

Beweis. In Satz 145 ist dieser Satz für das Enflach zweier Größen bewiesen, tritt nun zu dem Flache noch ein Fach oder Faktor hinzu, so bleibt der Satz nach 145 in Gültigkeit, also gilt er auch für beliebig viele Fache oder Faktoren, da auch die Klasse dabei stets kleiner als  $n$  bleibt und nie eine Strichzahl wird.

Beispiele. Seien 5 Fache 4ter Klasse in Bezug auf ein Hauptgebiet 6ter Stufe geflacht, so ist die Klasse des Flaches  $\varrho = 20 - 18 = 2$ . Seien 3 Fache 3ter Klasse in Bezug auf ein Hauptgebiet 5ter Stufe geflacht, so ist die Klasse des Flachs  $\varrho = 9 - 5 = 4$ .

147. **Satz.** Das Enflach der Ergänzungen zweier Größen ist die Ergänzung des Enflaches der Größen, oder

$$[^n\bar{A}\bar{B}] = \bar{[AB]} \quad \text{und} \quad \bar{[^nAB]} = [^n\bar{A}\bar{B}]$$



Beweis. 1. Wenn  $\alpha + \beta > n$ . Es sei  $A = S\alpha_a E_a$  und  $B = S\beta_b F_b$ , wo  $E_a$  und  $F_b$  Einheiten sind, so ist nach 130  $\bar{A} = S\alpha_a \bar{E}_a$  und  $\bar{B} = S\beta_b \bar{F}_b$ , und ist

$$[{}^n \overline{AB}] = [{}^n (S\alpha_a \bar{E}_a)(S\beta_b \bar{F}_b)] = S\alpha_a \beta_b [{}^n \bar{E}_a \bar{F}_b] \quad (\text{nach 74})$$

$$= S\alpha_a \beta_b [{}^n E_a F_b] \quad (\text{nach 139})$$

$$= (S\alpha_a \beta_b [{}^n E_a F_b]) \quad (\text{nach 130})$$

$$= [{}^n (S\alpha_a E_a)(S\beta_b F_b)] \quad (\text{nach 74})$$

$$= [{}^n AB]$$

2. Wenn  $\alpha + \beta < n$ . Wir setzen  $A = \bar{A}'$  und  $B = \bar{B}'$ . Dann ist allgemein für  $[{}^n A'B']$  die Summe  $\alpha' + \beta' > n$  nach 144, also ist dann nach 147,  $[{}^n A'B'] = [\bar{A}'\bar{B}'] = [{}^n AB]$ . Also ist  $[{}^n A'B'] = [{}^n AB]$ .

Ist nun  $n$  ungerade, oder ist  $n$ , sowie  $\alpha$  und  $\beta$  gerade, so ist nach 132  $\bar{A} = \bar{\bar{A}}' = A'$  und ebenso  $\bar{B} = \bar{\bar{B}}' = B'$ , mithin ist dann auch nach 132  $[{}^n \bar{A}\bar{B}] = [{}^n A'B'] = [\bar{A}'\bar{B}']$ . Also da  $[{}^n A'B'] = [\bar{A}'\bar{B}']$  ist, und auch  $[{}^n A'B'] = [{}^n AB]$ , so ist  $[{}^n AB] = [{}^n \bar{A}\bar{B}]$ .

Ist dagegen  $n$  gerade, und ist eine z. B.  $\alpha$  gerade, die andere  $\beta$  aber ungerade, so ist nach 132  $\bar{B} = \bar{\bar{B}}' = -B'$  und also

$[{}^n \bar{A}\bar{B}] = [{}^n A' \cdot (-B')] = -[{}^n A'B'] = [\bar{A}'\bar{B}']$  nach 132, da  $\alpha + \beta$  ungerade, mithin  $[{}^n A'B'] = -[{}^n A'B'] = [{}^n \bar{A}\bar{B}]$  und da allgemein für  $\alpha + \beta < n$   $[{}^n A'B'] = [{}^n AB]$  ist, so ist auch  $[{}^n \bar{A}\bar{B}] = [{}^n AB]$ .

Sind endlich  $n$  gerade, aber  $\alpha$  und  $\beta$  beide ungerade, so ist  $\bar{A} = \bar{\bar{A}}' = -A'$  und  $\bar{B} = \bar{\bar{B}}' = -B'$  nach 132, also ist

$[{}^n \bar{A}\bar{B}] = [{}^n (-A')(-B')] = [{}^n A'B'] = [\bar{A}'\bar{B}']$  nach 132, da  $\alpha + \beta$  gerade.

Es ist aber auch allgemein für  $\alpha + \beta < n$   $[{}^n A'B'] = [{}^n AB]$ , also ist auch  $[{}^n \bar{A}\bar{B}] = [{}^n AB]$ .

3. Wenn  $\alpha + \beta = n$ . Wir beweisen hier den Satz zuerst für Einheiten.

Wenn  $E$  und  $F$  Einheiten sind, welche keine Einheit erster Klasse gemein haben, so ist  $[{}^n EF] = \pm 1$  und ebenso  $[{}^n FE] = \pm 1$  nach 137. Dann ist aber nach 138 auch  $\bar{E} = [{}^n EFF]$  und  $\bar{F} = [{}^n FEE]$ , mithin ist  $[{}^n \bar{E}\bar{F}] = [{}^n EFF(FEE)] = [\pm 1 F(\pm 1 E)] = [{}^n FE] = \pm 1$ , d. h.  $[{}^n EF]$



eine Zahl und da nach 127 für Zahlen  $\bar{\alpha} = \alpha$  ist, so ist auch  ${}^n[EF] = \bar{{}^n[EF]}$ , also ist auch  ${}^n[\bar{E}\bar{F}] = \bar{{}^n[EF]}$ .

Wenn E und F Einheiten sind, welche eine oder mehrere Einheiten erster Klasse gemein haben, so ist nach 92  ${}^n[EF] = 0$ . Da aber  $\alpha + \beta = n$ , so können die Einheiten E und F zusammen nur nFache enthalten, es muss also mindestens eine der ursprünglichen Einheiten in E und F fehlen, es sei dies er, dann muss sowohl  $\bar{E}$  als auch  $\bar{F}$  diese Einheit enthalten, also nach 92  ${}^n[\bar{E}\bar{F}] = 0$  sein. Also ist dann auch  ${}^n[\bar{E}\bar{F}] = {}^n[EF]$ .

Da ferner hier  ${}^n[EF] = 0$  eine Zahl ist, so ist nach 127 auch  ${}^n[EF] = \bar{{}^n[EF]}$ , mithin  ${}^n[\bar{E}\bar{F}] = \bar{{}^n[EF]}$ .

Da nun das Gesetz für Einheiten gilt, so folgt ganz wie in Beweis 1, dass es auch für beliebige Größen gilt, deren Summe der Klassen  $\alpha + \beta = n$  ist.

148. **Satz.** Das Enflach der Ergänzungen mehrerer Größen ist die Ergänzung des Enflaches dieser Größen oder

$${}^n[\bar{A}\bar{B}\bar{C}\dots] = \bar{{}^n[ABC\dots]}$$

Beweis. Wenn der Satz für m Fache oder Faktoren gilt, so dass

$${}^n[\bar{A}\bar{B}\dots\bar{M}] = \bar{{}^n[AB\dots M]} \quad (\text{Annahme}),$$

so gilt er auch für  $m + 1$  Fache oder Faktoren, denn es sei dieser  $(m + 1)$ te Fach N, so ist

$$\begin{aligned} {}^n[\bar{A}\bar{B}\dots\bar{M}\bar{N}] &= \bar{{}^n[\bar{A}\bar{B}\dots\bar{M}]\bar{N}} && (\text{nach Annahme}) \\ &= \bar{{}^n[AB\dots MN]} && (\text{nach 147}) \end{aligned}$$

Nun gilt der Satz für 2 Fache nach 147, also gilt er auch fortschreitend für beliebig viele.

149. **Satz.** Wenn  $a, b, c, \dots$  Größen erster Klasse sind, so ist

$${}^n[\bar{a}\bar{b}\bar{c}\dots] = \bar{{}^n[abc\dots]}$$

Das rückschreitende Enflach der Ergänzungen von Größen erster bez.  $(n - 1)$ ter Klasse kann als ein Enflach betrachtet werden dessen Fache oder Faktoren  $(n - 1)$ ter bez. erster Klasse sind.

150. **Satz.** Die Ergänzung eines vielgliedrigen Ausdrucks (eines Polynoms) erhält man, wenn man von jedem Gliede, ohne das Vorzeichen des Gliedes zu ändern, die Ergänzung nimmt oder

$$\overline{(A \pm B \pm C \pm \dots)} = \bar{A} \pm \bar{B} \pm \bar{C} \pm \dots$$

Beweis. Es sei  $A = S_{\alpha_a}E_a$ ,  $B = S_{\beta_a}E_a$ ,  $C = S_{\gamma_a}E_a \dots$ , so ist  $\overline{(A \pm B \pm C \pm \dots)} =$



$$\begin{aligned}
&= (\overline{S\alpha_a E_a} \pm S\beta_a E_a \pm S\gamma_a E_a \pm \dots) = \overline{S(\alpha_a \pm \beta_a \pm \gamma_a \pm \dots) E_a} \\
&= S(\alpha_a \pm \beta_a \pm \gamma_a \pm \dots) \overline{E_a} \quad (\text{nach 130}) \\
&= S\alpha_a \overline{E_a} \pm S\beta_a \overline{E_a} \pm S\gamma_a \overline{E_a} \pm \dots \\
&= (\overline{S\alpha_a E_a}) \pm (\overline{S\beta_a E_a}) \pm (\overline{S\gamma_a E_a}) \pm \dots = \overline{A} \pm \overline{B} \pm \overline{C} \pm \dots \quad (\text{nach 130})
\end{aligned}$$

**Satz.** Eine Gleichung, in welcher keine andern Verknüpfungen 151. als die Bildung von Vielfachensummen beliebigen Gebietes und Modlung vorkommen, bleibt auch bestehen, wenn man in der Gleichung statt der Grösen ihre Ergänzungen setzt oder

Wenn  $f_0(A, B \dots) = \varphi_0(A', B' \dots)$ , wo  $f_0$  und  $\varphi_0$  Verknüpfungen der genannten Art sind, so ist auch

$$f_0(\overline{A}, \overline{B} \dots) = \varphi_0(\overline{A'}, \overline{B'} \dots)$$

**Beweis.** In den Verknüpfungen der Formeln  $f_0$  und  $\varphi_0$  können nur Zufügen und Abziehen, sowie Modlung vorkommen, wenn wir zur letzteren auch die Vervielfachung mit Zahlen rechnen. Nun bleibt beim Zufügen und Abziehen die Gleichung nach Satz 150 auch für die Ergänzungen und bei der Modlung nach Satz 148 auch für die Ergänzungen bestehen, mithin gilt allgemein für diese Arten der Verknüpfungen, wenn  $f_0(A, B \dots) = \varphi_0(A', B' \dots)$  auch  $f_0(\overline{A}, \overline{B} \dots) = \varphi_0(\overline{A'}, \overline{B'} \dots)$ .

**Satz.** Zwischen den Grösen  $m$  ter und denen  $(n - m)$  ter 152. Klasse in einem Hauptgebiete  $n$  ter Stufe besteht volle Gegenseitigkeit, so dass jeder Satz, der von den einen gilt, auch für die andern gilt.

**Satz.** Für drei Einheiten EFG, bei denen die Summe der 153. Klassen der Stufe des Hauptgebietes  $n$  gleich ist, ist

$$[{}^n \text{EF(EG)}] = [{}^n \text{EFGE}].$$

**Beweis.** 1. Wenn  $[{}^n \text{EFG}]$  keine gleichen Fache enthält, so muss es alle  $n$  ursprünglichen Einheiten enthalten und ist nach 137 also  $= \pm 1$ . Dann ist nach 138

$$\overline{G} = [{}^n \text{G(EF)(EF)}] \quad \overline{F} = [{}^n \text{F(EG)(EG)}]$$

Diese können wir, da  $[{}^n \text{G(EF)}]$  und  $[{}^n \text{F(EG)}]$  gleich  $\pm 1$  ist, mit  $[{}^n \text{G(EF)}]$  bez.  $[{}^n \text{F(EG)}]$  vervielfachen und erhalten dann  $[{}^n \text{G(EF)}] \cdot [{}^n \text{G(EF)}] = 1$ , und  $[{}^n \text{F(EG)}] \cdot [{}^n \text{F(EG)}] = 1$ , mithin

$$[{}^n \text{G(EF)}\overline{G}] = [{}^n \text{EF}], \quad [{}^n \text{F(EG)}\overline{F}] = [{}^n \text{EG}]$$



Hier erhält man, da man die Zahlfache beliebig ordnen kann,

$$\begin{aligned} {}^n[EF(EG)] &= {}^n[G(EF)\bar{G}] \cdot {}^n[F(EG)\bar{F}] = {}^n[G(EF)] {}^n[F(EG)] {}^n[\bar{G}\bar{F}] \\ &= {}^n[G(EF)] {}^n[F(EG)] \cdot {}^n[\bar{G}\bar{F}] \quad (\text{nach 147}) \end{aligned}$$

$$= {}^n[G(EF)] {}^n[F(EG)] {}^n[G\bar{F}\bar{E}] \quad (\text{nach 138})$$

In diesem Ausdrucke ist  ${}^n[FE] = \pm {}^n[EF]$  (nach 91), mithin bleibt das Zeichen unverändert, wenn man zweimal diese Aenderung macht, d. h. es wird

$$\begin{aligned} {}^n[EF(EG)] &= {}^n[G(EF)] {}^n[E(FG)] {}^n[G\bar{E}\bar{F}] \\ &= {}^n[EFGE] \end{aligned}$$

Da  ${}^n[GEF] = \pm 1$ , mithin  ${}^n[GEF] \cdot {}^n[GEF] = 1$  ist.

2. Wenn  ${}^n[EFG]$  gleiche Fache enthält, so ist  ${}^n[EFG] = 0$  nach 92. Ferner muss, da die Zahl seiner Fache  $n$  ist, mindestens eine der  $n$  Einheiten des Hauptgebietes, etwa  $e$ , in dem Fläche  ${}^n[EFG]$ , also auch in  ${}^n[EF]$  und in  ${}^n[EG]$  fehlen. Sei nun  $[EF] = \bar{Q}$  und  $[EG] = \bar{R}$ , so müssen nach 127 sowohl  $Q$  als  $R$  diese Einheit als Fach enthalten, mithin muss nach 92  ${}^n[QR]$  gleich Null sein, also nach 127 auch die Ergänzung derselben  ${}^n[\bar{Q}\bar{R}]$  gleich Null sein. Mithin ist

$${}^n[EF(EG)] = {}^n[\bar{Q}\bar{R}] = 0 = {}^n[EFGE]$$

154. **Satz.** Für drei einfache Größen  $A, B, C$ , bei denen die Summe der Stufenzahlen  $\alpha + \beta + \gamma$  der Stufenzahl des Hauptgebietes  $n$  gleich ist, ist

$${}^n[AB(AC)] = {}^n[ABC \cdot A]$$

Beweis. 1. Angenommen, der Satz gelte für den Fall, dass die drei einfachen Größen keine anderen Fache enthalten als solche, welche einer gegebenen Reihe von  $n$  Größen erster Stufe  $a_1, a_2, \dots, a_n$  angehören, so soll zunächst bewiesen werden, dass sie auch noch gilt, wenn man statt einer dieser Größen z. B. statt  $a_1$  eine Vielfachenfumme der  $n$  Größen, etwa

$$a' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = \sum_{1,n} \alpha_a a_a \quad \text{setzt.}$$

Es kann  $a_1$  in jeder der drei Größen  $A, B, C$  enthalten sein.

Ist  $a_1$  in  $B$  enthalten, so sei  $B = {}^n[a_1 D]$  und verwandle sich, wenn man  $a'$  statt  $a_1$  einführt,  $B$  in  $B' = {}^n[a' D]$ , dann wird



$$\begin{aligned}
{}^n[AB'(AC)] &= {}^n[A(a'D)(AC)] = \left[ A \left( S_{1,n}^{\alpha_a a_a D} \right) (AC) \right] \\
&= S_{1,n}^{\alpha_a} [A(a_a D)(AC)] && \text{(nach 75)} \\
&= S_{1,n}^{\alpha_a} [A(a_a D)CA] && \text{(nach Annahme)} \\
&= \left[ A \left( S_{1,n}^{\alpha_a a_a D} \right) CA \right] && \text{(nach 75)} \\
&= {}^n[Aa'DCA] = {}^n[AB'CA]
\end{aligned}$$

Genau derselbe Beweis folgt, wenn  $a_1$  in  $C$  enthalten ist.

Ist  $a_1$  in  $A$  enthalten, so sei  $A = [a_1 D]$  und verwandle sich, wenn man zunächst  $a' = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$  statt  $a_1$  einführt,  $A$  in  $A' = {}^n[a'D]$ , dann ist

$$A' = \alpha_1 {}^n[a_1 D] + \alpha_2 {}^n[a_2 D] = \alpha_1 A + \alpha_2 {}^n[a_2 D] \quad (+)$$

Wenn hier noch  $a_2$  in  $D$  enthalten ist, so wird nach 92 das letzte Stück  ${}^n[a_2 D] = 0$ , es würde also  $A' = \alpha_1 A$  und würde

$$\begin{aligned}
{}^n[A'B(A'C)] &= \alpha^2 {}^n[AB(AC)] = \alpha^2 {}^n[ABCA] && \text{(nach Annahme)} \\
&= {}^n[\alpha ABC(\alpha A)] = {}^n[A'BCA'] && \text{(nach 75)}
\end{aligned}$$

Wenn dagegen  $\alpha_2$  nicht in  $D$ , also auch nicht in  $A$  vorkommt, so kann es nur in  $B$  oder  $C$  enthalten sein. Es sei in  $B$  und  $B = [a_2 E]$ . Dann ist (nach +)  $A' = \alpha_1 A + \alpha_2 [a_2 D]$ , also da  $a_2$  auch in  $B$  enthalten  ${}^n[a_2 DB] = 0$ , mithin ist  ${}^n[A'B] = \alpha_1 {}^n[AB]$ , und ist  ${}^n[A'C] = {}^n[(\alpha_1 A + \alpha_2 [a_2 D])C] = \alpha_1 {}^n[AC] + \alpha_2 {}^n[a_2 DC]$ , mithin ist

$$\begin{aligned}
{}^n[A'B(A'C)] &= \alpha_1^2 {}^n[AB(AC)] + \alpha_1 \alpha_2 {}^n[AB(a_2 DC)] \\
&= \alpha_1^2 {}^n[ABCA] + \alpha_1 \alpha_2 {}^n[AB(a_2 DC)] && \text{(nach Annahme)}
\end{aligned}$$

Im zweiten Stücke [ist hier, wenn man für  $A$  und  $B$  die Werte einsetzt

$$\begin{aligned}
{}^n[AB(a_2 DC)] &= {}^n[a_1 Da_2 E(a_2 DC)] = - {}^n[a_2 Da_1 E(a_2 DC)] && \text{(nach 91)} \\
&= - {}^n[a_2 Da_1 EC(a_2 D)] && \text{(nach Annahme)} \\
&= {}^n[a_1 Da_2 EC(a_2 D)] = {}^n[ABC(a_2 D)] && \text{(nach 91)}
\end{aligned}$$

somit wird

$$\begin{aligned}
{}^n[A'B(A'C)] &= \alpha_1^2 {}^n[ABCA] + \alpha_1 \alpha_2 {}^n[ABC(a_2 D)] \\
&= \alpha_1 {}^n[ABC(\alpha_1 A + \alpha_2 a_2 D)] \\
&= \alpha_1 {}^n[ABCA'] = {}^n[A'BC \cdot A']
\end{aligned}$$



Ebenso folgt der Beweis, wenn  $a_2$  in C statt in B enthalten war. Es ist also bewiesen, dass der Satz bestehen bleibt, wenn sich das eine Fach  $a_1$  in  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$  verwandelt, also auch, wenn man dies wieder in  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$  verwandelt u. f. w.

2. Der Satz 154 bleibt also, wenn er für den Fall gilt, dass die 3 Größen A, B, C nur Fache enthalten, welche irgend einer Reihe von  $n$  Größen erster Klasse  $a_1, a_2, \dots, a_n$  angehören, auch bestehen, wenn man statt einer dieser Größen, eine Vielfachenfumme der  $n$  Größen setzt. Führt man diese Vielfachenfumme statt der ursprünglichen Gröse ein, so gilt nun der Satz für eine Reihe von  $n$  Größen und bleibt also nach Beweis 1 auch bestehen, wenn man statt einer zweiten Gröse eine Vielfachenfumme der  $n$  ursprünglichen Größen einführt. Er bleibt also auch bestehen, wenn man statt der  $n$  Größen  $a_1 a_2 \dots a_n$  andere  $n$  Größen  $b_1 \dots b_n$  einführt, welche gegenseitig frei und Vielfachenfummen jener Größen sind, und ist das Gebiet der ersten  $n$  Größen nach 22 dem Gebiete der letzten  $n$  Größen gleich.

3. Nun gilt der Satz nach 153, wenn die Größen A, B, C Einheiten sind, also gilt er auch für alle aus ihnen abgeleiteten Größen A, B, C, sofern die Reihe der  $n$  Größen erster Stufe, welche ihre Fache bilden, gegenseitig frei sind, oder sofern  $\alpha + \beta + \gamma = n$  ist.

155. Satz. Für die Größen A, B, C gilt die Gleichung

$$[AB(AC)] = [ABCA]$$

auch dann, wenn auch B und C zusammengesetzte Größen sind, sofern nur A eine einfache Gröse und die Summe der Klassen der drei Größen der Stufe des Hauptgebietes gleich ist.

Beweis. Es sei  $B = S_{\beta b} D_b$ ,  $C = S_{\gamma c} E_c$ , wo D und E Zeuge (Produkte) von einfachen Größen sind, so ist

$$[AB(AC)] = S_{\beta b} \gamma c [AD_b(AE_c)] \quad (\text{nach 74})$$

$$= S_{\beta b} \gamma c [AD_b E_c A] \quad (\text{nach 153})$$

$$= [A(S_{\beta b} D_b)(S_{\gamma c} E_c)A] \quad (\text{nach 74})$$

$$= [ABCA]$$

Wenn A eine zusammengesetzte Gröse ist, gilt der Satz nicht mehr allgemein. Sei z. B.  $A = ab + cd$ , wo a, b, c, d gegenseitig frei, und sei  $B = c$ ,  $C = d$ , so wird in Bezug auf ein Gebiet 4ter Stufe  $[AB(AC)] = [(ab + cd)c((ab + cd)d)] = [abc(abd)]$ , da  $[cdc]$  und  $[cdd]$  verschwinden; aber  $[abc(abd)] = [abcd(ab)]$ . Also wird

$$[AB(AC)] = [abcd(ab)]$$



Dagegen wird

$$\begin{aligned} {}^4[ABCA] &= {}^4[(ab + cd)cd(ab + cd)] = {}^4[abcd(ab + cd)] \\ &= {}^4[abcd(ab)] + {}^4[abcd(cd)] = {}^4[abcd(ab)] + {}^4[abcd(cd)] \end{aligned}$$

Also sind beide Ausdrücke um  ${}^4[abcd(cd)]$  von einander verschieden.

**Satz.** Für drei einfache Größen  $A, B, C$ , deren Flach nullter 156. Klasse ist, gelten die drei Gleichungen:

$$1. \quad {}^n[AB(AC)] = {}^n[ABCA]$$

$$2. \quad {}^n[AB(BC)] = {}^n[ABCB]$$

$$3. \quad {}^n[AC(BC)] = {}^n[ABCC].$$

**Beweis.** 1. Es seien die Klassen von  $A, B, C$  gleich  $\alpha, \beta, \gamma$ , die Stufe des Hauptgebietes sei  $n$ . Da nun das Flach  ${}^n[ABC]$  nullter Klasse sein soll, so muss nach 126 auch  $0 = {}^n(\alpha + \beta + \gamma)$ , d. h.  $\alpha + \beta + \gamma$  durch  $n$  teilbar sein, mithin da  $\alpha, \beta, \gamma$  kleiner als  $n$  sind, gleich  $n$  oder gleich  $2n$  sein. Wenn  $\alpha + \beta + \gamma = n$  ist, so gilt die Formel 1 nach 154. Wenn  $\alpha + \beta + \gamma = 2n$  ist, so sei  $A = \bar{A}'$ ,  $B = \bar{B}'$ ,  $C = \bar{C}'$  und seien  $\alpha', \beta', \gamma'$  die Klassen von  $A', B', C'$ , so ist  $\alpha' = n - \alpha$ ,  $\beta' = n - \beta$ ,  $\gamma' = n - \gamma$  (nach 130), mithin ist  $\alpha' + \beta' + \gamma' = 3n - (\alpha + \beta + \gamma) = 3n - 2n = n$ . Dann aber ist

$$\begin{aligned} {}^n[AB(AC)] &= {}^n[\bar{A}' \cdot \bar{B}' (\bar{A}' \cdot \bar{C}')] = {}^n[A'B' \cdot A'C'] \quad (\text{nach 147}) \\ &= {}^n[A'B'C'A'], \text{ nach 155, da } \alpha' + \beta' + \gamma' = n. \text{ Mithin} \\ &\text{nach 148} \end{aligned}$$

$$= {}^n[\bar{A}' \cdot \bar{B}' \cdot \bar{C}' \cdot \bar{A}'] = {}^n[ABC \cdot A].$$

2. Es sei  ${}^n[AB] = {}^n[BD]$ , so ist  $D$  von gleicher Klasse mit  $A$ , mithin

$$\begin{aligned} {}^n[AB(BC)] &= {}^n[BD(BC)] = {}^n[BDCB] \quad (\text{nach 156}_1) \\ &= {}^n[ABCB], \end{aligned}$$

da  ${}^n[BD] = {}^n[AB]$  ist.

3. Es sei  ${}^n[BC] = {}^n[CD]$ , so ist  $D$  von gleicher Klasse mit  $B$ , mithin

$$\begin{aligned} {}^n[AC(BC)] &= {}^n[AC(CD)] = {}^n[ACDC] \quad (156_2) \\ &= {}^n[ABCC], \end{aligned}$$

da  ${}^n[CD] = {}^n[BC]$  ist.



157. Satz. Für zwei einfache Größen A und C, bei denen die Summe der Klassen  $\alpha + \gamma$  der Stufe n des Hauptgebietes gleich ist, gelten für die einfache der Größe A untergeordnete Größe B die folgenden Gleichungen:

$$[A(BC)] = [ACB]$$

$$[CBA] = [CAB].$$

Beweis. Nach 117 ist A in der Form BD darstellbar, mithin ist

$$[A(BC)] = [BD(BC)] = [BDCB] \quad (\text{nach } 156,1)$$

$$= [ACB] \quad \text{und}$$

$$[CB \cdot A] = [CB(BD)] = [CBDB] \quad (\text{nach } 156,2)$$

$$= [CAB]$$

158. Satz. Das Enflach zweier einfachen Größen, die ungleich Null sind, ist dann, und nur dann von Null verschieden, wenn die Stufe ihres verbindenden Gebietes den größten, oder, was daselbe ist, wenn die Stufe ihres gemeinschaftlichen Gebietes den kleinsten Wert hat, den sie bei den Klassen der beiden Fache oder Faktoren und der Stufe des Hauptgebietes haben kann, oder

Wenn  $\delta$  die Klasse des verbindenden Gebietes,  $\gamma$  die des gemeinschaftlichen ist, und

wenn  $\alpha + \beta \leq n$ , d. h. wenn das Enflach ein fortschreitendes oder stehendes ist, so ist

$$[AB] \geq 0, \text{ dann und nur dann, wenn}$$

$$\alpha + \beta = \delta, \text{ oder, was daselbe ist, } \gamma = 0; \text{ ferner}$$

wenn  $\alpha + \beta > n$ , d. h. wenn das Enflach ein rückschreitendes ist, so ist

$$[AB] \geq 0, \text{ dann und nur dann, wenn}$$

$$\delta = n, \text{ oder, was daselbe ist, } \gamma = \alpha + \beta - n \text{ ist.}$$

Beweis. 1. Es sei  $\alpha + \beta \leq n$ , so ist das Enflach (nach 133) fortschreitend, mithin (nach 93, 92) dann und nur dann Null, wenn zwischen seinen einfachen Fachen eine Hörigkeit herrscht. Wenn also  $[AB] = 0$  ist, so lässt sich (nach 19) von den einfachen Fachen oder Faktoren des Flaches  $[AB]$  eines als Vielfachen summe aus den  $\alpha + \beta - 1$  übrigen darstellen. Dann werden mithin sämtliche einfache Fache jenes Flaches von einem Gebiete von niedriger als  $(\alpha + \beta)$ ter Stufe umfasst, d. h.  $\delta < \alpha + \beta$ . Ist hingegen  $[AB] \geq 0$ , so sind die einfachen Fache dieses Flaches (nach 93) gegenseitig frei, ihr verbindendes



Gebiet ist also von  $(\alpha + \beta)$ ter Stufe, d. h.  $\alpha + \beta = \delta$ . Also ist, wenn  $\alpha + \beta \leq n$  ist,  ${}^n[AB]$  dann und nur dann von Null verschieden, wenn  $\alpha + \beta = \delta$  ist. Dann aber ist nach 31 stets auch  $\gamma = 0$ .

Endlich ist, wenn  $\alpha + \beta \leq n$  ist, die kleinste Stufenzahl, die das den Grösen A und B gemeinschaftliche Gebiet haben kann, Null, und die grösste, die das verbindende Gebiet haben kann,  $\alpha + \beta$ .

2. Wenn dagegen  $\alpha + \beta > n$  ist, dann haben die Gebiete A und B, da sie von  $\alpha$ ter und  $\beta$ ter Stufe sind, nach 32 mindestens ein Gebiet  $(\alpha + \beta - n)$ ter, d. h.  $\gamma$ ter Stufe gemein. Sei demnach C eine Gröse von  $\gamma$ ter Klasse in diesem gemeinsamen Gebiete, dann lassen sich A und B (nach 117) in den Formen  $A = {}^n[CA_1]$ ,  $B = {}^n[CB_1]$  darstellen, wo  $A_1$  und  $B_1$  Grösen von der Klasse  $\alpha - \gamma$  und  $\beta - \gamma$  sind, mithin ist  ${}^n[CA_1B_1]$  von nter Klasse, da die Klasse  $\gamma + \alpha - \gamma + \beta - \gamma = \alpha + \beta - \gamma = n$  ist. Mithin ist nach 155

$${}^n[AB] = {}^n[CA_1(CB_1)] = {}^n[CA_1B_1C].$$

Hier ist aber  ${}^n[CA_1B_1]$  von nter oder mit andern Worten von nullter Klasse, also eine Zahl, und diese ist dann und nur dann Null, wenn  ${}^n[CA_1B_1]$ , d. h.  ${}^n[AB_1]$  Null ist. Aber nach Beweis 1 ist  ${}^n[AB_1]$  dann und nur dann Null, wenn A und  $B_1$  von einem Gebiete von niedriger als nter Stufe umfasst werden, aber da C in  $A = CA_1$  liegt, so werden dann auch A und  $CB_1$ , d. h. A und B von einem Gebiete niedriger als nter Stufe, umfasst, d. h.  $\delta < n$ . Somit ist, wenn  $\alpha + \beta > n$  ist,  ${}^n[AB]$  dann und nur dann von Null verschieden, wenn  $\delta = n$  ist. Dann aber ist nach 32 auch stets  $\gamma = \alpha + \beta - n$ .

Endlich ist, wenn  $\alpha + \beta > n$  ist, die grösste Stufenzahl, die das verbindende Gebiet haben kann, n, also (nach 31) die kleinste, die das verbindende Gebiet haben kann,  $\alpha + \beta - n$ . Mithin ist der Satz 158 in allen Teilen bewiesen.

**Erklärung.** Wir setzen das Nein einer Gröse A (Zeichen  $\bar{A}$ , 159. gelesen Nein A) gleich dem Enfläche  ${}^n[AA'A']$ , wo  $A'$  das Flach derjenigen n gegenseitig freien Grösen  $a_1 a_2 \dots a_n$  ist, welche in A nicht vorkommen oder  $\bar{A} \stackrel{n}{=} [AA'A']$  \* wo  $[AA'] = \pm [a_1 a_2 \dots a_n]$ .

Wir müssen diese Erklärung hier einfügen, um zu einer allgemeinen Geltung für die Gesetze der Modlung zu gelangen.

**Satz.** Alle Gesetze der Modlung gelten auch noch, wenn man 160. überall statt der ursprünglichen Einheiten erster Klasse eine beliebige



**Reihe von  $n$  Größen erster Klasse setzt, welche Vielfachensummen derselben sind, und deren Enflach 1 ist.**

Beweis. Es seien  $e_1 \dots e_n$  die ursprünglichen Einheiten, und  $a_1 \dots a_n$  Vielfachensummen derselben, für welche

$$[a_1, a_2 \dots a_n] = 1 \text{ gilt.}$$

Es sei nun  $F'$  das Flach aller in der Einheit  $m$ ter Stufe  $E$  nicht vorkommenden Einheiten erster Stufe des Hauptgebietes, so ist nach 138

$$\bar{E} = [EFF].$$

Sei in gleicher Weise  $A'$  das Flach aller in  $A$  nicht vorkommender Größen  $a_1, a_2 \dots a_n$ , so ist nach 159

$$\bar{A} = [AA'A'].$$

Wir müssen nun zunächst beweisen, dass auch für diese Gröse die in Erklärung 133 aufgestellte Bestimmung ihre Geltung behält, wenn wir die Größen  $a_1 \dots a_n$  an Stelle der ursprünglichen Einheiten einführen, d. h. dass

(\*)  $[AB] = [\bar{A}\bar{B}]$  sei, wenn  $\alpha + \beta \geq n$  ist. Wir beweisen den Satz zunächst für den Fall, wenn  $\alpha + \beta < n$  ist.

1. Sei nun zunächst  $[AB] = 0$ , so müssen (nach 156) die Gebiete  $A$  und  $B$  ein Gebiet von höherer als nullter Stufe, also ein Gebiet  $\gamma$ ter Stufe oder  $\gamma$  Fache erster Klasse gemein haben, dann werden diese Fache, da  $\bar{A}$  nur diejenigen Fache enthält, welche in  $A$  nicht vorkommen, in  $\bar{A}$  fehlen, und aus gleichem Grunde auch in  $\bar{B}$ , also werden  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  von einem Gebiete von niedriger als  $n$ ter Stufe umfasst, also ist (nach 158)

$$[\bar{A}\bar{B}] = 0,$$

mithin, da auch  $[AB] = 0$  ist und die Ergänzung einer Zahl (nach 127) dieser gleich ist, d. h. die von Null selbst Null ist, so ist

$$[AB] = [\bar{A}\bar{B}].$$

2. Sei ferner  $[AB] \geq 0$ , so enthält daselbe  $\alpha + \beta$  verschiedene Fache erster Klasse der Reihe  $a_1 \dots a_n$ . Sei nun  $C$  das Flach der übrigen Fache, so ist (nach 91)  $[ABC] = \pm [a_1 \dots a_n]$ , mithin, da  $[a_1 \dots a_n] = 1$  ist, so ist  $[ABC] = \pm 1$ . Da nun  $[BC]$  das Flach der in  $A$  nicht vorkommenden Fache ist, so ist nach der hier angenommenen Bezeichnung

$$\bar{A} = [ABC(BC)], \text{ ebenso}$$



$$\bar{B} = {}^n[BAC(AC)] \text{ und } \bar{[AB]} = {}^n[ABCC]$$

wo  ${}^n[ABC]$  und  ${}^n[BAC]$  wie bewiesen  $= \pm 1$  sind, oder Zahlen sind,

mithin ist  ${}^n[\bar{A}\bar{B}] = {}^n[ABC]{}^n[BAC]{}^n[BC(AC)]$

$$= {}^n[ABC]{}^n[BAC]{}^n[BAC \cdot C] \quad (154_3).$$

Da aber  ${}^n[BAC] = \pm 1$  ist, so ist  ${}^n[BAC]{}^n[BAC] = 1$ . Also

$${}^n[\bar{A}\bar{B}] = {}^n[ABC \cdot C] = {}^n[AB].$$

Es gilt also die Formel, wenn  $\alpha + \beta < n$  ist.

Dann gilt die Formel aber auch, wenn  $\alpha + \beta > n$  ist, und zwar folgt dieser Teil des Satzes ganz in gleicher Weise, wie Satz 147<sub>2</sub>.

Es gilt also die Erklärung 133, auch wenn man statt der ursprünglichen Einheiten die Größen  $a_1 \dots a_n$  einführt, ebenso gelten alle früheren Sätze, wenn man statt der  $n$  ursprünglichen Einheiten beliebige gegenseitig freie  $n$  Größen setzt, deren Flach nicht Null ist, also auch, wenn man statt derselben die Größen  $a_1 \dots a_n$  setzt. Aus diesen früheren Sätzen und der in der Erklärung festgestellten Bestimmung sind aber alle folgenden Gesetze abgeleitet, folglich gelten auch diese noch bei der angegebenen Einführung der Größen  $a_1 \dots a_n$  statt der ursprünglichen Einheiten  $e_1 \dots e_n$ .

Zu bemerken ist hier, dass  $\bar{A}$  nicht mit  $\bar{A}$  zusammenfällt, so z. B. ist in dem Gebiete dritter Stufe  $e_1, e_2, e_3$ , wo  ${}^3[e_1 e_2 e_3] = 1$  ist, die Ergänzung von  $e_1 + e_2$ , da  $\bar{e}_1 = {}^3[e_2 e_3]$ ,  $\bar{e}_2 = {}^3[e_3 e_1]$  ist,  ${}^3[e_1 + e_2] = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 = {}^3[e_2 e_3] + {}^3[e_3 e_1]$ . Dagegen ist, wenn

$$a_1 = e_1 + e_2, a_2 = e_2, a_3 = e_3$$

ist bei Anwendung der Bezeichnung in obigem Satze

$$\bar{a}_1 = {}^3[a_1 a_2 a_3 (a_2 a_3)] = {}^3[a_2 a_3] = {}^3[e_2 e_3],$$

also von  $\bar{a}_1$  um  $[e_3 e_1]$  verschieden. Im folgenden Abschnitte wird sich ergeben, welche Beziehungen zwischen  $e_1 \dots e_n$  und  $a_1 \dots a_n$  stattfinden müssen, wenn  $\bar{A} = \bar{A}$  sein soll.

**Satz. Wenn**

$$1 = {}^n[a_1 \dots a_n] = {}^n[PP'] = {}^n[AA'] = {}^n[BB'] = {}^n[C \cdot C'] = \dots$$

ist, und alle diese Größen  $P, P', A, A' \dots$  keine anderen Größen erster Klasse enthalten, als die der Reihe  $a_1 \dots a_n$  angehören, auch

$$P = {}^n[ABC \dots] \text{ ist, so ist auch } P' = {}^n[A'B'C' \dots].$$

**Beweis.** Nach Erklärung 159 ist, da  $1 = {}^n[PP'] = {}^n[AA']$

$$\bar{P} = {}^n[PP'P'] = P', \quad \bar{A} = {}^n[AA'A'] = A' \text{ u. s. w.}$$



Da nun nach 160 alle früheren Sätze, also namentlich auch Satz 148 noch gelten, so ist, wenn man überall das Zeichen  $\bar{\cdot}$  statt  $--$  setzt,

$$\bar{\bar{[ABC \dots]}} = \bar{\bar{[A\bar{B}\bar{C} \dots]}},$$

mithin  $\bar{P} = \bar{\bar{[A\bar{B}\bar{C} \dots]}}$ .

Folglich, da  $\bar{P} = P'$ ,  $\bar{A} = A'$ ,  $\bar{B} = B'$ ,  $\bar{C} = C' \dots$  ist,

$$P' = \bar{\bar{[A'B'C' \dots]}}.$$

162. Satz. Wenn man aus  $n$  Größen erster Klasse, deren Enflach gleich 1 ist, die Geschiedsfläche (die multiplikativen Kombinationen) zur  $n - 1$ ten Klasse bildet, und die einfachen Größen in jedem Geschiedsfläche nach dem Abece, die Fläche selbst nach dem Lexikon ordnet, unter der Annahme, dass die Reihe jener  $n$  Größen als ein Abece betrachtet werde, so ist das Enflach aus den  $n - m$  ersten dieser Geschiedsfläche gleich dem Enflach aus den  $m$  ersten jener  $n$  Größen, d. h.

$$\bar{\bar{[A_n \dots A_{m+1}]} = \bar{\bar{[a_1 \dots a_m]}},$$

wenn  $A_r = \bar{\bar{[a_1 \dots a_{r-1} a_{r+1} \dots a_n]}}$

und  $\bar{\bar{[a_1 \dots a_n]} = 1}$  ist.

Beweis. 1. Wir wollen zuerst beweisen, dass

$$\bar{\bar{[a_1 \dots a_r A_r]} = \bar{\bar{[a_1 \dots a_{r-1}]}}$$

sei. Nach der Bezeichnung im Satze ist

$$A_r = \bar{\bar{[a_1 \dots a_{r-1} a_{r+1} \dots a_n]}}. \text{ Mithin ist}$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{[a_1 \dots a_r A_r]} &= \bar{\bar{[a_1 \dots a_r (a_1 \dots a_{r-1} a_{r+1} \dots a_n)]}} \\ &= \bar{\bar{[a_1 \dots a_r a_{r+1} \dots a_n]}} \bar{\bar{[a_1 \dots a_{r-1}]} \\ &= \bar{\bar{[a_1 \dots a_{r-1}]}} \end{aligned} \quad (153,1)$$

da  $\bar{\bar{[a_1 \dots a_n]} = 1}$  ist.

2. Mithin ist

$$\bar{\bar{[A_n A_{n-1}]} = \bar{\bar{[a_1 \dots a_{n-1} A_{n-1}]} = \bar{\bar{[a_1 \dots a_{n-2}]}}$$

$$\bar{\bar{[A_n A_{n-1} A_{n-2}]} = \bar{\bar{[a_1 \dots a_{n-2} A_{n-2}]} = \bar{\bar{[a_1 \dots a_{n-3}]}}$$

u. f. w. Also

$$\bar{\bar{[A_n A_{n-1} \dots A_{n-r}]} = \bar{\bar{[a_1 \dots a_{n-r-1}]}.$$

Mithin, wenn  $n - r - 1 = m$  ist,

$$\bar{\bar{[A_n A_{n-1} \dots A_{m+1}]} = \bar{\bar{[a_1 \dots a_m]}}.$$



**Satz.** Wenn  $F_1 F_2 \dots$  die Geschiedsfläche aus den Fachen erster Klasse einer von Null verschiedenen Gröse  $B$  sind und  $D_\alpha$  jedesmal aus denjenigen Fachen von  $B$  besteht, welche in  $F_\alpha$  fehlen, auch die Fache so geordnet sind, dass jedesmal  ${}^n[F_\alpha D_\alpha] = B$  ist, so ist für jede Gröse  $A$ , deren Klasse die Klasse von  $D_\alpha$  zu der des Hauptgebietes ergänzt,

$${}^n[AB] = S[{}^nAD_\alpha F_\alpha] = {}^n[AD_1 F_1] + {}^n[AD_2 F_2] + \dots$$

**Beweis.** Es sei  $m$  die Anzahl der Fache erster Stufe von  $B$ ; es sei  $n$  die Stufe des Hauptgebietes,  $\alpha$  die Klasse von  $A$ , und sei  $B = [b_1 b_2 \dots b_m]$ .

Da nun nach der Annahme  $B \geq 0$  ist, so sind (nach 93) die Grösen  $b_1 \dots b_m$  gegenseitig frei, mithin lassen sich (nach 23) zu ihnen noch  $n - m$  Grösen erster Klasse  $b_{m+1} \dots b_n$  von der Art hinzufügen, dass alle Grösen erster Klasse, welche dem betrachteten Hauptgebiete angehören, als Vielfachensummen derselben dargestellt werden können. Auch  $A$  kann dann als Gröse  $\alpha$ ter Klasse in der Form

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots = S\alpha_\alpha A_\alpha$$

dargestellt werden, wo  $A_1, A_2, \dots$  die Geschiedsfläche aus  $b_1 \dots b_n$  zur  $\alpha$ ten Klasse sind. Es seien diese Geschiedsfläche  $A_1, A_2, \dots$  so gewählt, dass jedesmal  $A_\alpha$  aus denjenigen jener  $n$  Grösen besteht, welche in  $D_\alpha$  fehlen. Dies ist allemal möglich, da  $D_\alpha$  nach der Annahme  $n - \alpha$  jener Grösen enthält. Dann ist, da nach der Annahme  $B = {}^n[F_\alpha D_\alpha]$  ist

$$\begin{aligned} {}^n[AB] &= S[{}^n\alpha_\alpha A_\alpha B] = S\alpha_\alpha [{}^nA_\alpha B] \\ &= S\alpha_\alpha [{}^nA_\alpha (F_\alpha D_\alpha)]. \end{aligned} \quad (73)$$

Da nun  $F_\alpha$  nur solche jener  $n$  Grösen  $b_1 \dots b_n$  enthält, die dem  $D_\alpha$  fehlen, und  $A_\alpha$  sämtliche der in  $D_\alpha$  fehlenden Grösen  $b_1 \dots b_n$  enthält, so ist  $F_\alpha$  dem  $A_\alpha$  untergeordnet, also (nach 157)  $[{}^nA_\alpha (F_\alpha D_\alpha)] = [{}^nA_\alpha D_\alpha F_\alpha]$ , mithin  $[{}^nAB] = S\alpha_\alpha [{}^nA_\alpha D_\alpha F_\alpha]$ .

Ferner ist aber  $[{}^nA_b D_\alpha] = 0$  wenn  $b$  von  $\alpha$  verschieden ist, weil dann  $A_b$  mindestens ein Fach enthält, das auch in  $D_\alpha$  vorkommt, also kann man statt  $\alpha_\alpha [{}^nA_\alpha D_\alpha]$  schreiben  $S\alpha_b [{}^nA_b D_\alpha]$ , wo sich die Summe nur auf den Zeiger  $b$  bezieht, d. h. es ist

$$\alpha_\alpha [{}^nA_\alpha D_\alpha] = S\alpha_b [{}^nA_b D_\alpha] = [{}^nS\alpha_b A_b D_\alpha] = [{}^nAD_\alpha],$$

mithin  $[{}^nAB] = S[{}^nAD_\alpha F_\alpha]$ .



## 11. Die reinen und die gemischten Enfläche.

Auch in dieser Nummer setzen wir in allen Sätzen die Stufe des Hauptgebietes gleich  $n$ , die Klasse der Gröse  $A$  gleich  $\alpha$ , die der Gröse  $B$  gleich  $\beta$ , die der Gröse  $C$  gleich  $\gamma$  u. f. w., und bemerken dies für alle Sätze vorweg.

164. **Erklärung.** Ein rein fortschreitendes Modelflach heist das Modelflach mehrer Grösen, wenn diese keiner andern als der fortschreitenden Flachung unterliegen.

Ein rein rückschreitendes Modelflach heist das Modelflach mehrer Grösen, wenn diese keiner andern als der rückschreitenden Modlung unterliegen. Wenn das Gefammtflach nullter Stufe ist, so kann die letzte Modlung, welche dies Gefammtflach bildet, nach 133 sowohl fortschreitend wie rückschreitend sein.

Beide Arten der Fläche heissen reine Modelfläche, alle andern gemischte.

Beispielsweise ist das Enflach  ${}^n[ABCD \dots HJ]$  ein rein fortschreitendes, wenn das Enflach  ${}^n[AB]$ , ebenso das Enflach von  ${}^n[AB]$  mit  $C$ , das Enflach von  ${}^n[ABC]$  mit  $D$  jedes fortschreitend ist u. f. w., endlich auch das Enflach von  ${}^n[ABCD \dots H]$  mit  $J$  fortschreitend ist. Dagegen heist das Enflach ein rein rückschreitendes, wenn das Enflach  ${}^n[AB]$ , ebenso das Enflach von  ${}^n[AB]$  mit  $C$ , das von  ${}^n[ABC]$  mit  $D$  jedes rückschreitend ist u. f. w., endlich auch das von  ${}^n[ABCD \dots H]$  mit  $J$  rückschreitend ist. Im Hauptgebiete dritter Stufe bildet das Dreiflach  ${}^3[ab(ac)(bc)]$  ein Beispiel des rein rückschreitenden Modelflaches.

165. **Satz.** Wenn ein Enflach mehrer Grösen  ${}^n[ABC \dots]$  ein rein fortschreitendes ist, so ist das der Ergänzungen  ${}^n[\overline{A}\overline{B}\overline{C} \dots]$  ein rein rückschreitendes und umgekehrt.

Beweis. Nach 144 gilt der Satz für zwei Fache oder Faktoren, mithin da  ${}^n[AB]$  ein fortschreitendes Flach ist, so ist  ${}^n[\overline{A}\overline{B}]$  ein rückschreitendes, und da  ${}^n[ABC]$  ein fortschreitendes ist, so ist  ${}^n[(\overline{A}\overline{B})\overline{C}]$  ein rückschreitendes, also ist  ${}^n[\overline{A}\overline{B}\overline{C}]$  ein rein rückschreitendes u. f. w.

166. **Satz.** Ein Enflach von  $m$  Grösen  $A, B, C, \dots L, M$  ist ein rein fortschreitendes, wenn die Summe der Klassen dieser Grösen ebenso gros oder kleiner ist als die Stufe ( $n$ ) des Hauptgebietes, hingegen ein rein rückschreitendes, wenn jene Summe ebenso gros oder gröser ist als  $n(m - 1)$ , ein gemischtes, wenn jene Summe gröser als  $n$  und kleiner als  $n(m - 1)$  ist.



Beweis. 1. Es seien  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  die Klassen der Größen  $A, B, C, \dots$ . Wenn nun  $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu \leq n$  ist, so ist auch  $\alpha + \beta < n$ , folglich ist das Enflach  ${}^n[AB]$  (nach 133) ein fortschreitendes. Ebenso ist  $\alpha + \beta + \gamma < n$ , also das Enflach der zwei Größen  ${}^n[AB]$  und  $C$  ein fortschreitendes, u. f. w. Endlich ist auch  $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu \leq n$ , also auch das Enflach der zwei Größen  ${}^n[ABC \dots L]$  und  $M$ , da die Stufe von  ${}^n[ABC \dots L]$  (nach 146) gleich  $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda$  ist, ein fortschreitendes. Ebenso folgt das Umgekehrte, dass, wenn  ${}^n[ABC \dots LM]$  ein rein fortschreitendes Flach ist, dann auch  $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu \leq n$  sein muss.

2. Wenn  $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu \geq n(m-1)$  ist, so folgt:  $(n-\alpha) + (n-\beta) + (n-\gamma) + \dots + (n-\lambda) + (n-\mu) \leq n$ , da  $m$  die Anzahl der Größen  $A, B, C, \dots, L, M$  ist. Da nun  $n-\alpha$  die Klasse der Ergänzung von  $A$ , d. h. die Klasse von  $\bar{A}$  ist u. f. w., so ist das Flach

$${}^n[\bar{A}\bar{B}\bar{C} \dots \bar{L}\bar{M}]$$

nach Beweis 1 ein rein fortschreitendes, folglich (nach 165)  ${}^n[ABC \dots LM]$  ein rein rückschreitendes.

**Satz.** Die Klasse eines rein fortschreitenden Enflaches ist 0, 167. wenn die Summe der Klassen seiner Fache oder Faktoren gleich der Stufe  $n$  des Hauptgebietes ist, in jedem andern Falle ist die Klasse jenes Enflaches gleich der Summe der Klassen seiner Fache oder Faktoren. Die Klasse eines rein rückschreitenden Enflaches ist  $= \sigma - (m-1)n$ , wenn  $\sigma$  die Summe der Klassen seiner Fache und  $m$  die Anzahl dieser Fache ist.

Beweis. Für zwei Fache oder Faktoren ist der Satz bereits in 145 bewiesen. Ist nun das Enflach  ${}^n[ABC \dots LM]$  ein rein fortschreitendes und sind  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu$  die Klassen von  $A, B, C, \dots, L, M$ , so ist die von  ${}^n[AB] = \alpha + \beta$ , die also von  ${}^n[ABC] = \alpha + \beta + \gamma$  u. f. w.; also die von  ${}^n[ABC \dots L] = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda$ . Ist nun  $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu < n$ , so ist nach demselben Satze (145) die Klasse von  ${}^n[ABC \dots LM] = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu$ , wenn aber  $\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu = n$  ist, so ist sie nach demselben Satze null. Ist zweitens das Modellflach  ${}^n[ABC \dots LM]$  ein rein rückschreitendes, so



ist nach dem angeführten Satze die Klasse von  ${}^n[AB]$  gleich  $\alpha + \beta - n$ , also die von  ${}^n[ABC]$  gleich  $\alpha + \beta - n$ , also die von  ${}^n[ABC]$  gleich  $\alpha + \beta + \gamma - 2n$  u. f. w., also wenn  $m$  die Anzahl der Fache von  ${}^n[ABC \dots LM]$  ist, die Stufenzahl dieses Flaches  $= \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + \mu - (m - 1)n$ .

168. **Satz.** Das Gebiet eines rein fortschreitenden Enflaches ist gleich dem die sämtlichen Fache desselben verbindenden Gebiete, und das Gebiet eines rein rückschreitenden Enflaches ist gleich dem für die sämtlichen Fache desselben gemeinschaftlichen Gebiete, sofern in beiden Fällen das Enflach nicht null ist.

Beweis. 1. Es sei  ${}^n[AB \dots]$  ein rein fortschreitendes Flach und  $A = {}^n[a_1 \dots a_q]$ ,  $B = {}^n[b_1 \dots b_r]$ , u. f. w., wo  $a_1, \dots, a_q$ ,  $b_1, \dots, b_r$ , u. f. w. Größen erster Klasse sind, dann ist also

$${}^n[AB \dots] = {}^n[(a_1 \dots a_q)(b_1 \dots b_r) \dots].$$

In dem fortschreitenden Fläche kann man nun (nach 116) die Klammern weglassen und es wird der letzte Ausdruck  $= {}^n[a_1 \dots a_q b_1 \dots b_r \dots]$ .

Das Gebiet des Enflaches ist also nach 108 das aus den einfachen Größen  $a_1, \dots, a_q$ ,  $b_1, \dots, b_r, \dots$  ableitbare Gebiet. Ebenso ist das Gebiet von  $A$  das aus  $a_1, \dots, a_q$  ableitbare Gebiet u. f. w. und nach 30 ist das aus den Größen zweier oder mehrer Gebiete  $A, B, \dots$  ableitbare Gebiet, oder die Summe dieser Gebiete das diese verbindende Gebiet, also ist das Gebiet des fortschreitenden Flaches  ${}^n[AB \dots]$  das die Fache oder Faktoren  $A, B, \dots$  verbindende Gebiet.

2. Es sei  ${}^n[AB]$  ein rein rückschreitendes Enflach ungleich null, also die Summe der Stufenzahlen  $\alpha$  und  $\beta$  der Fache  $A$  und  $B$  größer als  $n$ , dann haben  $A$  und  $B$  ein Gebiet  $\alpha + \beta - n$ ter Stufe gemein; aber auch kein Gebiet höherer Stufe, weil sonst (nach 158) das Flach null sein würde. Also lassen sich  $A$  und  $B$  auf ein gemeinschaftliches Fach  $D$  von  $\alpha + \beta - n$ ter Stufe von der Art bringen, dass  $A = DF$ ,  $B = DG$  und  $D, F, G$  einfache Größen sind; dann ist nach 156,<sub>1</sub>

$${}^n[AB] = {}^n[DF(DG)] = {}^n[DFG \cdot D].$$

Hier ist  ${}^n[DFG]$  eine von Null verschiedene Zahl, also ist das Gebiet von  ${}^n[AB] \equiv D$  gleich dem den Fachen  $A$  und  $B$  gemeinschaftlichen Gebiete. Tritt nun noch ein Fach  $C$  hinzu, so wird ganz in gleicher Weise das Gebiet von



$${}^n[ABC] \equiv {}^n[DC] \equiv E,$$

wenn E das dem D und C gemeinschaftliche Gebiet ist, also das dem A, B, C gemeinschaftliche u. f. w.

**Satz.** In einem reinen Enfläche kann man Klammern beliebig 169. setzen und weglassen, d. h. es ist

$${}^n[A(BC)] = {}^n[ABC],$$

wenn  ${}^n[ABC]$  ein reines Enfläch ist.

**Beweis.** 1. In dem rein fortschreitenden Fläche kann man nach 116 die Klammern beliebig setzen oder weglassen.

2. Wenn das Enfläch  ${}^n[ABC]$  ein rein rückschreitendes ist, so ist nach 165 das Enfläch  ${}^n[\overline{A}\overline{B}\overline{C}]$  ein rein fortschreitendes, also nach Beweis 1

$${}^n[\overline{A}(\overline{B}\overline{C})] = {}^n[\overline{A}\overline{B}\overline{C}],$$

d. h. nach 151

$${}^n[A(BC)] = {}^n[ABC].$$

**Satz.** Ein reines Enfläch verändert seinen Wert nicht, wenn 170. man seine Fläche in lauter Fläche erster bezüglich  $(n - 1)$ ter Klasse auflöst, je nachdem das gegebene Enfläch fortschreitend oder rückschreitend war. Das fortschreitende Enfläch bleibt auch in Bezug auf diese neuen Fläche fortschreitend und ebenso das rückschreitende Enfläch bleibt auch in Bezug auf die neuen Fläche rückschreitend oder

Wenn  $P = {}^n[AB \dots G]$

ein reines Enfläch der Fläche A, B, ... G ist, und

$A = {}^n[a_1 \dots a_q]$ ,  $B = {}^n[a_{q+1} \dots a_r]$  u. f. w.,  $G = {}^n[a_{s+1} \dots a_t]$  und  $a_1 \dots a_t$  Größen erster oder  $(n - 1)$ ter Klasse sind, je nachdem das Enfläch  ${}^n[AB \dots G]$  ein fortschreitendes oder rückschreitendes ist, so ist auch

$$P = {}^n[a_1 a_2 \dots a_t]$$

und zwar ist auch dies Enfläch ein rein fortschreitendes oder rückschreitendes, je nachdem das gegebene Enfläch  ${}^n[AB \dots G]$  es war.

**Beweis.** Es sei das Enfläch  ${}^n[AB \dots G]$  ein rein fortschreitendes, so ist die Summe der Klassen von A, B, ... G, d. h. t, kleiner als n, somit bleibt es auch nach 166 ein rein fortschreitendes in Bezug auf die Fläche  $a_1 \dots a_t$ , wenn man  ${}^n[a_1 \dots a_q]$  statt A setzt u. f. w., mithin



kann man nach 169 die Klammern weglassen und erhält  $P = \overset{n}{[a_1 a_2 \dots a_t]}$ . Wenn aber  $\overset{n}{[AB \dots G]}$  ein rein rückschreitendes Enflach ist, so wird  $\overset{n}{[\bar{A}\bar{B} \dots \bar{G}]}$  nach 165 ein rein fortschreitendes, und wenn  $A = \overset{n}{[a_1 \dots a_q]}$  ist u. f. w., und  $a_1, \dots, a_t$  Größen  $(n-1)$ ter Klasse sind, so ist  $\bar{A} = \overset{n}{[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_q]}$  u. f. w., wo  $\bar{a}_1 \dots \bar{a}_t$  Größen erster Klasse sind, somit nach Beweis 1

$$\overset{n}{[\bar{A}\bar{B} \dots \bar{G}]} = \overset{n}{[\bar{a}_1 \dots \bar{a}_t]}.$$

Mithin nach 151 auch

$$\overset{n}{[AB \dots G]} = \overset{n}{[a_1 \dots a_t]},$$

und dies nach 165 ein rein rückschreitendes Enflach.

171. **Satz.** Wenn  $\alpha, \beta \dots$  Klassen der Fache eines reinen Enflaches  $P$  und  $\varphi$  die Klasse des Enflaches, ferner  $\delta$  die Stufenzahl des verbindenden,  $\gamma$  die des gemeinschaftlichen Gebietes ist, so ist

1) wenn das Enflach  $P$  ein fortschreitendes ist,  $P$  dann und nur dann ein von Null verschiedenes Enflach der Klasse  $\delta$ , wenn

$$\delta = \alpha + \beta + \dots,$$

2) wenn das Enflach  $P$  ein rückschreitendes ist, so ist  $P$  dann und nur dann ein von Null verschiedenes Enflach der Klasse  $\gamma$ , wenn

$$\gamma = \alpha + \beta + \dots - (m-1)n \text{ ist.}$$

Beweis. 1. Wenn das Enflach  $P$  ein fortschreitendes ist, so kann man die Fache oder Faktoren nach 170 in lauter Fache erster Klasse auflösen; die Anzahl dieser Fache erster Klasse ist nach 109 gleich  $\alpha + \beta + \dots$ ; das Flach dieser Fache ist nach 93 und 92 dann und nur dann von Null verschieden, wenn die Fache erster Klasse gegenseitig frei sind, d. h. nach 21 wenn das verbindende Gebiet von  $(\alpha + \beta + \dots)$ ter Stufe, also  $\delta = \alpha + \beta + \dots$  ist. Dann ist die Klasse des Enflaches nach 109  $= \alpha + \beta + \dots$ , d. h.  $= \delta$ .

2. Wenn das Enflach  $P$  ein rückschreitendes ist, so gilt der Satz zunächst für zwei Fache. Denn nach 158 ist  $P$  dann und nur dann von Null verschieden, wenn  $\gamma = \alpha + \beta - n$ , und nach 145 ist auch  $\varphi = \alpha + \beta - n$ , das heist  $\varphi = \gamma$ . Mithin gilt der Satz für zwei Fache. Durch wiederholte Anwendung erhält man daraus den Satz für beliebig viele Fache.

172. **Satz.** Ein reines Enflach bleibt sich selbst deckend, wenn man die Ordnung der Fache oder Faktoren beliebig ändert, d. h.  $P_{A,B} \equiv P_{B,A}$ .

Beweis. 1. Es sei zuerst das Enflach  $\overset{n}{[AB]}$  ein fortschreitendes, so ist nach 89



$$[AB] = (-1)^{\alpha\beta} [BA], \text{ mithin } [AB] \equiv [BA].$$

Sei dagegen das Enflach  $[AB]$  ein rückschreitendes, so ist  $[\overline{A}\overline{B}]$  nach 165 ein fortschreitendes Enflach und da  $n - \alpha$  und  $n - \beta$  die Klassen von  $\overline{A}$  und  $\overline{B}$  sind

$$[\overline{A}\overline{B}] = (-1)^{(n-\alpha)(n-\beta)} [\overline{B}\overline{A}],$$

folglich nach 151

$$[AB] = (-1)^{(n-\alpha)(n-\beta)} [BA], \text{ mithin auch } [AB] \equiv [BA].$$

2. Es sei ferner das Enflach  $[PAB]$ , wo A und B zwei auf einander folgende Fache sind, ein reines, so ist

$$[PAB] = [P(AB)] \quad (169)$$

$$\equiv [P(BA)] \quad (\text{nach } 172_1)$$

$$= [PBA] \quad (169),$$

mithin  $[PAB] \equiv [PBA]$ .

3. Indem man nun zwei auf einander folgende Fache vertauscht, so kann man nach und nach jedes Fach auf jede beliebige Stelle bringen, also den Fachen jede beliebige Ordnung geben, während dabei nach Beweis 2 das Enflach sich deckend bleibt.

**Satz.** Wenn ein reines Enflach zwei Fache enthält, deren 173. Klasse nicht null ist, und deren eines dem andern untergeordnet ist, so ist das Enflach null, oder

Es ist  $P_{A,B} = 0$ , wenn P reines Enflach und von den Größen A und B eine der andern untergeordnet ist.

Beweis. 1. Seien von den Größen A und B die eine der andern untergeordnet, etwa B dem A, so ist B das gemeinschaftliche Gebiet und A das verbindende, also ist das Enflach  $[AB] = 0$ , da die Stufe von B  $> 0$ , und die von A  $< n$  ist nach 158

2. Wenn nun das Enflach  $P_{A,B}$  zwei Fache A und B enthält, deren eines dem andern untergeordnet ist, so kann man nach 172 die Fache oder Faktoren so ordnen, dass A und B auf einander folgen, wobei das Flach sich selbst deckend bleibt. Dann kann man nach 169 diese beiden Fache in eine Klammer schliesen. Ihr Enflach ist null nach Beweis 1, mithin ist ein Fach oder Faktor von P null, also auch P selbst null.

**Satz.** Ein gemischtes Enflach dreier Größen  $[ABC]$  ist dann 174. und nur dann null, wenn entweder  $[AB] = 0$  ist, oder alle drei



Größen  $A, B, C$  von einem Gebiete von niedriger als  $n$ ter Stufe umfasst werden, oder ein Gebiet von höherer als  $0$ ter Stufe gemein haben.

Beweis. Es sei nach 166  $\alpha + \beta + \gamma > n$  und  $< 2n$ . Ferner sei  ${}^n[AB] \geq 0$ , und sei zuerst  $\alpha + \beta > n$  etwa  $= n + \zeta$ , so lassen sich nach 135  $A$  und  $B$  auf ein gemeinschaftliches Fach  $\zeta$ ter Stufe  $Z$  bringen, so dass  $A = ZA', B = ZB'$  ist; dann ist

$${}^n[AB] = {}^n[ZA'B'Z] \quad (156_1),$$

mithin da  ${}^n[AB]$  nach der Annahme  $\geq 0$  ist, so muss auch  ${}^n[ZA'B'] \geq 0$  sein. Dann ist

$${}^n[ABC] = {}^n[ZA'B'(ZC)]$$

also, da  ${}^n[ZA'B']$  eine von Null verschiedene Zahl ist, so ist  ${}^n[ABC]$  dann und nur dann null, wenn  ${}^n[ZC]$  es ist. Die Stufe von  ${}^n[ZC]$  aber ist  $= \zeta + \gamma = \alpha + \beta - n + \gamma$ , also  $< n$ , da  $\alpha + \beta + \gamma < 2n$  ist. Also ist das Enflach  ${}^n[ZC]$  nach 158 dann und nur dann null, wenn  $Z$  und  $C$  ein Fach von höherer als nullter Stufe gemein haben, d. h. (da  $Z$  das gemeinsame Fach von  $A$  und  $B$  ist) wenn  $A, B$  und  $C$  ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben.

Es sei zweitens  $\alpha + \beta \leq n$ , so ist  ${}^n[AB]$  ein fortschreitendes Enflach, mithin, da  ${}^n[AB]$  nach der Annahme  $\geq 0$  ist, das Enflach  ${}^n[ABC]$  nach 158 dann und nur dann null, wenn  ${}^n[AB]$  und  $C$ , d. h.  $A, B$  und  $C$ , von einem Gebiete niedriger als  $n$ ter Stufe umfasst werden. Der Satz ist hiermit bewiesen.

175. **Satz.** Die Ordnung, in welcher man mit zwei einfachen Größen, deren eine der andern untergeordnet ist, fortschreitend modelt, ist gleichgültig für das Ergebniss, d. h.

$${}^n[ABC] = {}^n[ACB], \text{ wo } B \text{ dem } C, \text{ bez. } C \text{ dem } B \text{ untergeordnet ist.}$$

Beweis. Wenn  $B$  von nullter Stufe, d. h. eine Zahl ist, so findet nach 4 die Gleichheit beider Seiten statt. Wenn die Enflache nicht gemischt sind, so sind beide Seiten nach 173 null, mithin ist der Satz nur noch zu erweisen für den Fall, dass das Enflach  ${}^n[ABC]$  gemischt ist und zugleich  $B$  von höherer als nullter Stufe ist. Es ist für diesen Fall  $\alpha + \beta + \gamma > n$  und  $< 2n$ , durch  $\beta$  von Null verschieden und zugleich  $\beta \leq \gamma$ , da  $B$  dem  $C$  untergeordnet. Wir nehmen zunächst an,  $A$  sei eine einfache Gröse; dann sind nur drei



Fälle möglich: entweder es ist  $\alpha + \gamma < n$ , oder es ist  $\alpha + \gamma \geq n$  und dabei  $\alpha + \beta \leq n$ , oder es ist  $\alpha + \beta > n$ .

a. Es sei zunächst  $\alpha + \gamma < n$ , so werden die drei Größen A, B, C von einem Gebiete  $\alpha + \gamma$ ter Stufe, also von einem Gebiete von niedriger als  $n$ ter Stufe umfasst, da B dem C untergeordnet ist, somit sind nach 173 sowohl  ${}^n[ABC]$  als  ${}^n[ACB]$  null, also

$${}^n[ABC] = {}^n[ACB].$$

b. Sei demnächst  $\alpha + \gamma \geq n$  und  $\alpha + \beta \leq n$ , ersteres etwa  $= n + \zeta$ , wo  $\zeta$  auch null sein kann, so müssen nach 135 sich A und C auf ein gemeinschaftliches Fach Z von  $\zeta$ ter Stufe bringen lassen in der Art, dass  $C = {}^n[ZC']$  ist, wo Z und C' einfache Größen sind und Z dem A untergeordnet ist. Dann ist C' von  $(\gamma - \zeta)$ ter Stufe, also die Summe der Klassen von A und C' gleich  $\alpha + \gamma - \zeta = n$ , also ist nach 157

$$\begin{aligned} {}^n[AC] &= {}^n[A(ZC)] = {}^n[AC'Z], \text{ mithin} \\ {}^n[ACB] &= {}^n[AC'(ZB)] \end{aligned}$$

Das Enfläch  ${}^n[ZB]$  ist hier ein fortschreitendes; denn es ist  $\zeta + \beta = \alpha + \beta + \gamma - n < n$ , da ja das Enfläch ein gemischtes sein sollte.

Sei nun zunächst  ${}^n[ZB]$  null, so haben nach 158 Z und B ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein, dann haben aber auch, da Z dem A untergeordnet ist, A und B dies Gebiet gemein; das Enfläch  ${}^n[AB]$  ist aber, da  $\alpha + \beta \leq n$  ist, ein fortschreitendes, also ist es nach 158 null, mithin ist auch  ${}^n[ABC] = 0$ , ebenso wie  ${}^n[ACB]$ , und folglich beide einander gleich.

Sei dagegen  ${}^n[ZB] \geq 0$ , so ist, da Z und B beide dem C untergeordnet sind, auch ihr verbindendes Gebiet  ${}^n[ZB]$  dem Gebiete von C untergeordnet, also kann C nach 117 in der Form  ${}^n[ZBF]$  dargestellt werden, wo F wieder eine einfache Gröse ist. Dann wird, da wir oben  $C = ZC'$  setzten,  $C' = BF$  gesetzt werden können, und man erhält:

$${}^n[ACB] = {}^n[AC'(ZB)] = {}^n[ABF(ZB)].$$

Ferner ist aber auch, da Z dem A untergeordnet, also auch  ${}^n[ZB]$  dem  ${}^n[AB]$  untergeordnet und  ${}^n[ABF] = {}^n[AC']$  von nullter Klasse ist, wie dies oben bewiesen, auch:

$${}^n[ABC] = {}^n[AB(ZBF)] = {}^n[ABF(ZB)] \quad (\text{nach 157}).$$



Mithin ist  ${}^n[ACB] = {}^n[ABC]$ .

c. Sei endlich  $\alpha + \beta > n$ , so find, da  $\beta \leq \gamma$ , auch  $(n - \alpha) + (n - \beta)$  und  $(n - \alpha) + (n - \gamma) < n$ , also dann, da  $n - \alpha$ ,  $n - \beta$ ,  $n - \gamma$  die Klassen der Ergänzungen von A, B, C find,

$${}^n[\overline{ABC}] = {}^n[\overline{ACB}] \quad (\text{nach } 175,1)$$

also nach 151

$${}^n[ABC] = {}^n[ACB].$$

Also ist der Satz bewiesen, sofern A eine einfache Gröse ist.

d. Sei endlich A eine zusammengesetzte Gröse, so ist sie immer nach 108 eine Vielfachenfumme von einfachen Grösen. Es sei  $A = S\alpha_a A_a$ , wo alle  $A_a$  einfache Grösen find, so ist

$${}^n[ABC] = S\alpha_a {}^n[A_a BC] \quad (73)$$

$$= S\alpha_a {}^n[A_a CB] \quad (\text{nach } 175,1)$$

$$= {}^n[ACB] \quad (73).$$

176. Satz. Wenn A, B, C drei einfache Grösen find, so find die Enfläche  ${}^n[ABC]$  und  ${}^n[ACB]$  nur in folgenden Fällen deckend oder es ist

$${}^n[ABC] = {}^n[ACB], \text{ nur dann,}$$

a) wenn  $\alpha + \beta + \gamma \leq n$  ist, dann ist

$${}^n[ABC] = (-1)^{\beta\gamma} {}^n[ACB],$$

b) wenn  $\alpha + \beta + \gamma \geq 2n$  ist, dann ist

$${}^n[ABC] = (-1)^{(n-\beta)(n-\gamma)} {}^n[ACB],$$

c) wenn  ${}^n[ABC]$  ein gemischtes Enflach ist und A, B und C entweder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben oder von einem Gebiete von niederer als nter Stufe umfasst werden; dann ist

$${}^n[ABC] = {}^n[ACB] = 0,$$

d) wenn  ${}^n[AB]$  und  ${}^n[AC]$  null find, dann ist

$${}^n[ABC] = {}^n[ACB] = 0,$$

e) wenn  $\alpha + \beta + \gamma = n + t$  ist und B und C entweder ein Gebiet von tter Stufe gemein haben oder von einem Gebiete tter Stufe umfasst werden; dann ist

$${}^n[ABC] = (-1)^{(\beta-t)(\gamma-t)} {}^n[ACB],$$

f) wenn B dem C untergeordnet ist; dann ist

$${}^n[ABC] = {}^n[ACB].$$



Beweis. a. Die erste Formel ist in 89 bewiesen.

b. Wenn  $\alpha + \beta + \gamma \geq 2n$  ist, so ist  $(n - \alpha) + (n - \beta) + (n - \gamma) \leq n$ , folglich, da  $n - \alpha$ ,  $n - \beta$ ,  $n - \gamma$  die Klassen der Ergänzungen von A, B, C sind, so ist in diesem Falle

$${}^n[\overline{A}\overline{B}\overline{C}] = (-1)^{(n-\beta)(n-\gamma)} {}^n[\overline{A}\overline{C}\overline{B}] \quad (\text{nach 176, a})$$

Also nach 151

$${}^n[ABC] = (-1)^{(n-\beta)(n-\gamma)} {}^n[ACB].$$

Da in beiden Fällen  $\alpha + \beta + \gamma$  entweder  $\leq n$  oder  $\geq 2n$  war, so bleibt nur der Fall übrig, wo  $\alpha + \beta + \gamma > n$  und  $< 2n$  ist, also der Fall des gemischten Enflachs.

c. Angenommen zuerst  ${}^n[ABC]$  sei null. Ein gemischtes Enflach  ${}^n[ABC]$  ist nach 174 dann und nur dann null, wenn entweder  ${}^n[AB] = 0$  ist, oder alle drei Größen A, B, C von einem Gebiete niedriger als nter Stufe umfasst werden, oder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben. Tritt einer der beiden letzten Fälle ein, so ist sowohl  ${}^n[ABC]$  als  ${}^n[ACB]$  null, und also  ${}^n[ABC] = {}^n[ACB] = 0$ , somit Formel (c) bewiesen.

d. Wenn  ${}^n[AB] = 0$  ist. Wenn hier  ${}^n[ABC]$  mit  ${}^n[ACB]$  deckend sein soll, so muss auch  ${}^n[ACB]$  null sein, dies kann aber, da die beiden Fälle der Formel c ausgeschlossen sind, nicht anders geschehen als wenn auch  ${}^n[AC]$  null ist, und es tritt also dann der Fall (d) ein. Es bleiben also nur noch die Fälle des von Null verschiedenen gemischten Enflaches übrig.

e. Da  $\alpha + \beta + \gamma > n$  und  $< 2n$  ist, so können wir  $\alpha + \beta + \gamma = n + t$  setzen, wo  $t > 0$  und  $< n$  ist. Nun sind hier wie in 175 drei Fälle zu unterscheiden. Erstens der, wo die Summen  $\alpha + \beta$  und  $\alpha + \gamma$  beide kleiner als n sind. Dann ist, da  ${}^n[AB]$  und  ${}^n[AC]$  dann von Null verschiedene fortschreitende Enfläche sind,  $\alpha + \beta$  die Klasse von  ${}^n[AB]$  und  $\alpha + \gamma$  die von  ${}^n[AC]$ . Dann haben  ${}^n[AB]$  und C nach 31 ein Fach oder einen Faktor von  $\alpha + \beta + \gamma - n$ ter, d. h. tter Klasse gemein. Dieser sei Z, und sei  $C = {}^n[ZC']$ , so ist die Summe der Klassen von A, B, C' gleich n, also  ${}^n[ABC']$  eine Zahl, und Z ist dem  ${}^n[AB]$  untergeordnet. Mithin ist dann nach 157

$${}^n[ABC] = {}^n[AB(ZC')] = {}^n[ABC' \cdot Z] \equiv Z.$$



Mithin muss, wenn  ${}^n[ABC] \equiv {}^n[ACB]$  sein soll, auch  ${}^n[ACB] \equiv Z$  sein, d. h.  ${}^n[AC]$  und  $B$  müssen sich auf ein mit  $Z$  deckendes gemeinschaftliches Fach bringen lassen, d. h. auf das Fach  $Z$  selbst; mithin muss  $Z$  dem  $B$  untergeordnet sein, es war aber auch dem  $C$  untergeordnet, d. h.  $B$  und  $C$  lassen sich auf das gemeinschaftliche Fach  $t$ ter Klasse  $Z$  bringen, oder sie haben ein Gebiet  $t$ ter Stufe gemein. Es sei  $B = {}^n[ZF]$ , so ist

$${}^n[ABC] = {}^n[AB(ZC')] = {}^n[ABC'Z] \quad (157)$$

$$= {}^n[A(ZF)C'Z] = {}^n[AZFC'Z] \quad (169)$$

$${}^n[ACB] = {}^n[AC(ZF)] = {}^n[ACFZ] \quad (157)$$

$$= {}^n[A(ZC')FZ] = {}^n[AZC'F \cdot Z] \quad (169).$$

Da nun  $C = {}^n[ZC']$  war, so ist  $C'$  von  $(\gamma - t)$ ter Klasse, und da  $B = {}^n[ZF]$  war, so ist  $F$  von  $(\beta - t)$ ter Klasse, mithin

$${}^n[AZFC'Z] = (-1)^{(\beta-t)(\gamma-t)} {}^n[AZC'FZ] \quad (89),$$

also

$${}^n[ABC] = (-1)^{(\beta-t)(\gamma-t)} {}^n[ACB],$$

d. h. es ergibt sich der erste Teil der Formel e.

Seien hingegen die beiden Summen  $\alpha + \beta$  und  $\alpha + \gamma$  grösser als  $n$ , so sind die Summen  $(n - \alpha) + (n - \beta)$  und  $(n - \alpha) + (n - \gamma)$  kleiner als  $n$ , und  $(n - \alpha) + (n - \beta) + (n - \gamma) = n + (n - t)$ . Folglich sind in diesem Falle (nach dem ersten Teile der Formel e) die Enfläche  ${}^n[\bar{A}\bar{B}\bar{C}]$  und  ${}^n[\bar{A}\bar{C}\bar{B}]$  nur dann einander deckend, wenn sich  $\bar{B}$  und  $\bar{C}$  auf ein gemeinschaftliches Fach von  $(n - t)$ ter Klasse bringen lassen. Dieses sei  $\bar{Z}$  und sei  $\bar{B} = {}^n[\bar{Z}\bar{F}]$ ,  $\bar{C} = {}^n[\bar{Z}\bar{C}']$ , so ist (nach dem ersten Teile von e)

$${}^n[\bar{A}\bar{B}\bar{C}] = (-1)^{(t-\beta)(t-\gamma)} {}^n[\bar{A}\bar{C}\bar{B}].$$

Aber nach 147 ist dann

$$B = {}^n[ZF], \quad C = {}^n[ZC']$$

$${}^n[ABC] = (-1)^{(t-\beta)(t-\gamma)} {}^n[ACB] = (-1)^{(\beta-t)(\gamma-t)} {}^n[ACB],$$

d. h. es ist der zweite Teil der Formel (e) bewiesen, auch werden dann  $B$  und  $C$  beide (da das Fach  $B = {}^n[ZF]$  ist und zugleich  $B$  von geringerer Stufe als  $Z$  ist, mithin als rückschreitendes Enfach erscheint,



und ebenso  $C = {}^n[ZC']$ , und also B und C beide dem Z untergeordnet find) von dem Gebiete Z umfasst.

f. Es bleibt somit nur noch der Fall übrig, wo von den Summen  $\alpha + \beta$  und  $\alpha + \gamma$  die eine, etwa die erstere, ebenso gros oder kleiner, die andere ebenso gros oder grösser als n ist. Dann lassen sich nach 31  ${}^n[AB]$  und C auf ein gemeinschaftliches Fach  $\alpha + \beta + \gamma - n$  ter, d. h. tter Klasse bringen. Dieses sei Z, und sei  $C = {}^n[ZC']$  (wo C' von nullter Klasse, wenn  $\alpha + \beta = n$  ist), so wird

$${}^n[ABC] = {}^n[AB(ZC')] = {}^n[ABC'Z] \quad (157).$$

Ferner sei  $\alpha + \gamma = n + u$ , so haben A und C ein Fach von u ter Klasse gemein, dieses sei F, und sei  $C = {}^n[FG]$ , so ist

$${}^n[AC] = {}^n[A(FG)] = {}^n[AGF] \quad (157).$$

Also

$${}^n[ACB] = {}^n[AGFB] = {}^n[AG(BF)].$$

Soll also  ${}^n[ABC] \equiv {}^n[ACB]$  sein, so muss, da  ${}^n[ABC']$  und  ${}^n[AG]$  von Null verschiedene Zahlen sind,  $Z \equiv {}^n[BF]$  sein, d. h. es muss B dem Z untergeordnet sein, aber auch Z ist dem C untergeordnet, mithin auch B dem C. Dies aber ist die Bedingung der Formel (f) und nach 175 ist dann

$${}^n[ABC] = {}^n[ACB].$$

Der Satz ist mithin vollständig in allen Teilen bewiesen.

**Satz.** Wenn A, B, C drei einfache Grössen sind, so sind die 177. Enfläche  ${}^n[BAC]$  und  ${}^n[B(AC)]$  nur in folgenden Fällen deckend, d. h. es ist

$${}^n[BAC] \equiv {}^n[B(AC)] \text{ nur dann,}$$

a. b. wenn beide Enfläche reine sind, d. h. wenn  $\alpha + \beta + \gamma \leq n$  oder  $\geq 2n$ , dann ist  ${}^n[BAC] = {}^n[B(AC)]$ ,

c. d. wenn  ${}^n[AB]$  und  ${}^n[AC]$  null sind, oder wenn  ${}^n[BAC]$  ein gemischtes Modellfach ist und A, B und C entweder ein Gebiet von höherer als nullter Stufe gemein haben oder von einem niederen Gebiete als nter Stufe umfasst werden, so ist

$${}^n[BAC] = {}^n[B(AC)] = 0,$$

e. wenn  $\alpha + \beta + \gamma = n + t$  und B und C entweder ein Gebiet



von  $t$ ter Stufe gemein haben, oder von einem Gebiete  $t$ ter Stufe umfasst werden, so ist, sofern  $\alpha + \beta$  und  $\alpha + \gamma < n$  sind,

$$[BAC] = (-1)^{\alpha t} [B(AC)],$$

sofern dagegen  $\alpha + \beta$  und  $\alpha + \gamma > n$  sind, so ist

$$[BAC] = (-1)^{(n-\alpha)(n-t)} [B(AC)],$$

f. wenn  $B$  und  $C$  eine der andern untergeordnet ist, so ist, sofern  $\alpha + \beta < n$  und  $\alpha + \gamma \geq n$  ist,

$$[BAC] = (-1)^{\beta(n-\gamma)} [B(AC)], \text{ ferner}$$

sofern  $\alpha + \beta > n$  und  $\alpha + \gamma \leq n$  ist,

$$[BAC] = (-1)^{(n-\beta)\gamma} [B(AC)], \text{ ferner}$$

sofern zugleich  $\alpha + \beta$  und  $\alpha + \gamma > n$  oder zugleich  $\alpha + \beta$  und  $\alpha + \gamma < n$  sind,

$$[BAC] = [B(AC)] = 0.$$

Beweis. Es ist in allen diesen Fällen

$$[BAC] \equiv [ABC] \quad (\text{nach } 89)$$

$$\equiv [ACB] \quad (\text{nach } 175)$$

$$\equiv [B(AC)] \quad (\text{nach } 89).$$

Die Formel a. und b. folgt unmittelbar aus 169. Die Formel c. und d. folgt unmittelbar, da  $[AC] = 0$  ist und da  $[BA] = \pm [AB] = 0$  ist u. s. w., siehe 176.

178. **Satz.** Ein Enflach nullter Klasse bleibt sich selbst deckend, wenn man die Ordnung aller seiner Fache umkehrt, oder die letzten Fache in beliebiger Anzahl mit umgekehrter Ordnung in Klammern schließt, d. h.

$$\begin{aligned} [A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n] &\equiv [A_n (A_{n-1} \cdots (A_2 A_1))] \\ &\equiv [A_1 \cdots A_{n-r-1} \cdot (A_n (A_{n-1} \cdots A_{n-r}))]. \end{aligned}$$

Beweis. Wir setzen

$$[A_1 A_2 \cdots A_{n-2}] = P,$$

dann ist

$$[A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n] = [P A_{n-1} A_n].$$

Da das Enflach von nullter Klasse sein soll, so muss die Summe der Klassen von  $P$ ,  $A_{n-1}$ ,  $A_n$  nach 146 durch  $n$  teilbar sein, also, da die einzelnen Klassen  $> 0$  und  $< n$  sind, entweder gleich  $n$  oder gleich  $2n$  sein; im erstern Falle ist das Enflach der drei Größen



$P, A_{n-1}, A_n$  ein rein fortschreitendes, im letztern ein rein rückschreitendes, in beiden also ein reines, somit nach 177

$$[PA_{n-1}A_n] \equiv [P \cdot (A_n A_{n-1})],$$

oder

$$[A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n] \equiv [A_1 \dots A_{n-2} \cdot (A_n A_{n-1})].$$

Betrachten wir diesen Ausdruck als ein Enflach der drei Größen  $[A_1 \dots A_{n-3}]$ ,  $A_{n-2}$  und  $[A_n A_{n-1}]$ , so erhalten wir auf gleiche Weise  $[A_1 \dots A_{n-3} \cdot A_{n-2} \cdot A_n A_{n-1}] \equiv [A_1 \dots A_{n-3} \cdot (A_n (A_{n-1} A_{n-2}))]$ .

Wendet man dies Verfahren rmal an, so erhält man

$$[A_1 \dots A_n] \equiv [A_1 \dots A_{n-r-1} \cdot (A_n (A_{n-1} \dots A_{n-r}))],$$

d. h. das Enflach bleibt sich selbst deckend, wenn man die letzten Fache in beliebiger Anzahl (r) mit umgekehrter Ordnung in Klammern schließt. Hiernach wird nun auch

$$[A_1 A_2 \dots A_n] \equiv [A_1 \cdot (A_n (A_{n-1} \dots A_2))],$$

somit nach 89

$$\equiv [A_n (A_{n-1} \dots (A_2 A_1))],$$

also ist auch der erste Teil des Satzes bewiesen.

## 12. Die Zurückleitung auf ein niederes Gebiet.

**Erklärung.** Wenn C im Hauptgebiete nter Stufe eine Vielfachenfumme der Geschiedsfläche (multiplikativen Komplexionen) zu irgend einer Klasse,  $A_1 \dots A_u$ , aus den n freien Größen erster bez. (n — 1)ter Klasse,  $a_1, \dots, a_n$  ist, d. h. wenn

$$C = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_u A_u$$

und wenn  $C_1$  die entsprechende Vielfachenfumme der Geschiedsfläche zu derselben Klasse  $A_1 \dots A_r$  aus m derselben freien Größen, etwa aus  $a_1, \dots, a_m$  ist, d. h. wenn

$$C_1 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_r A_r,$$

so heist  $C_1$  die Zurückleitung der Größe C auf das Gebiet  $[a_1 \dots a_m]$  unter Ausschluss des Gebietes  $[a_{m+1} \dots a_n]$ .

Die Zurückleitung heist eine fortschreitende, wenn die Größen  $a_1 \dots a_n$  erster Klasse, sie heist eine rückschreitende, wenn die Größen  $a_1 \dots a_n$  Größen (n — 1)ter Klasse sind.

Die Zurückleitungen mehrerer Größen heißen in demselben Sinne genommen, wenn sie auf dasselbe Gebiet und unter Ausschluss desselben Gebietes zurückgeleitet sind.



Als Beispiel für diese Zurückleitungen nehmen wir den Raum, der, wie wir sahen, wenn wir von Punkten ausgehen, ein Hauptgebiet vierter Stufe ist. Es seien  $a, b, c, d$  vier gegenseitig freie Größen erster Stufe, d. h. vier nicht in ein und derselben Ebene liegende Punkte, so ist  $C_1 = [bc] + [ca] + [ab]$  die fortschreitende Zurückleitung von  $C = [bc] + [ca] + [ab] + [ad] + [bd] + [cd]$  auf das Gebiet oder auf die Ebene  $[abc]$ , unter Ausschluss des Gebietes  $d$ . Bezeichnen wir ferner  $[bcd]$  mit  $a'$ ,  $[cad]$  mit  $b'$ ,  $[abd]$  mit  $c'$  und  $[acb]$  mit  $d'$ , so sind  $a', b', c', d'$  Größen  $(n-1)$ ter Stufe, da  $n=4$  ist und setzen wir noch  $[abcd]=1$ , so ist  $[b'c'] = [cad \cdot abd] = [abcd][ad] = [ad]$ ,  $[c'a'] = [bd]$ ,  $[a'b'] = [cd]$ ,  $[a'd'] = [bc]$ ,  $[b'd'] = [ca]$ ,  $[c'd'] = [ab]$ , und es wird

$$C = [a'd'] + [b'd'] + [c'd'] + [b'c'] + [c'a'] + [a'b'].$$

Dann wird, wenn

$$C' = [b'c'] + [c'a'] + [a'b']$$

ist,  $C'$  die rückschreitende Zurückleitung von  $C$  auf das Gebiet  $[a'b'c']$ , unter Ausschluss des Gebietes  $d'$ , sein, d. h., da  $[a'b'c'] = [cd \cdot abd] \equiv d$ , und  $d' \equiv [abc]$  ist, dann ist  $C'$  die Zurückleitung von  $C$  auf das Gebiet  $d$ , unter Ausschluss des Gebietes  $[abc]$ , d. h. es ist  $C'$  im Raume die Zurückleitung einer Linie auf einen Punkt als rückschreitende Zurückleitung. Die Zurückleitung selbst ist in der Raumlehre gleichbedeutend mit der Beschattung oder Projektion im weitesten und eigentlichsten Sinne des Wortes.

180. **Satz.** Wenn die Stufe  $m$  des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, größer ist, als die Klasse  $p$  der zurückgeleiteten Größe, so ist die Zurückleitung fortschreitend, wenn dagegen die erstere Stufe  $m$  kleiner ist als  $p$ , so ist die Zurückleitung rückschreitend; wenn die Stufe und die Klasse gleich sind, so kann die Zurückleitung sowohl fortschreitend als rückschreitend sein.

Beweis. Es seien  $a_1 \dots a_n$  gegenseitig freie Größen erster Klasse und seien  $A_1, \dots, A_u$  die Geschiedsfläche aus  $a_1 \dots a_n$  zur  $p$ ten Klasse, und  $A_1, \dots, A_r$  die Geschiedsfläche zur  $p$ ten Klasse aus  $a_1 \dots a_m$  und sei

$$C = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_u A_u$$

$$C_1 = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_r A_r,$$

also nach 179 sei  $C_1$  die fortschreitende Zurückleitung der Größe  $C$  auf das Gebiet  $[a_1 \dots a_m]$ , unter Ausschluss des Gebietes  $[a_{m+1} \dots a_n]$ , so würde es, wenn  $m < p$  wäre, gar keine Geschiedsfläche aus  $a_1 \dots a_m$  zur  $p$ ten Klasse geben, also auch keine fortschreitende Zurückleitung. Es muss also für die fortschreitende Zurückleitung



$m \geq p$  fein, d. h. es muss die Stufe des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, ebenso gros oder grösser fein als die Klasse der zurückgeleiteten Grösse.

Macht man dieselben Annahmen wie vorher, mit dem einzigen Unterschiede, dass  $a_1, \dots, a_n$  in dem Hauptgebiete  $n$ ter Stufe Grössen  $(n-1)$ ter Klasse sind, so ist die Zurückleitung eine rückschreitende; und auch hier muss, aus gleichem Grunde wie vorher,  $m \geq p$  fein. Aber hier ist nach 130 die Stufenzahl von  $[a_1 \dots a_m]$  gleich  $n-m$  und die von  $C$  gleich  $n-p$ , somit muss, da  $m \geq p$  ist, auch  $n-m \leq n-p$  fein, d. h. die Stufe des Gebietes, auf welches zurückgeleitet wird, wird ebenso gros oder kleiner als die Klasse der zurückgeleiteten Grösse, d. h. es gilt der Satz.

**Satz.** Die Zurückleitung  $A'$  einer Grösse  $A$  auf ein Gebiet  $B$ , 181. unter Ausschluss des Gebietes  $C$ , ist

$$A' = \frac{[B(AC)]}{[BC]}, \text{ und es ist } A' = [B(AC)], \text{ wenn } [BC] = 1 \text{ ist.}$$

Beweis. Es seien  $a_1 \dots a_n$   $n$  gegenseitig freie Grössen erster oder  $(n-1)$ ter Klasse, und  $A_1 \dots A_u$  die Geschiedsfläche aus  $a_1 \dots a_n$ , und  $A_1 \dots A_r$  die aus  $a_1 \dots a_m$  und  $A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_u A_u$ , mithin  $A' = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_r A_r$ , und sei  $[a_1 \dots a_m] = B$ ,  $[a_{m+1} \dots a_n] = C$ , so ist

$[AC] = [(\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_r A_r + \alpha_{r+1} A_{r+1} + \dots + \alpha_u A_u)C]$ ; aber da  $A_1, \dots, A_r$  die Geschiedsfläche aus  $a_1 \dots a_m$  sind, und da  $A_{r+1}, \dots, A_u$  diejenigen Geschiedsfläche aus  $a_1 \dots a_n$  sind, welche nicht zugleich Geschiedsfläche aus  $a_1 \dots a_m$  sind, so muss jede der Grössen  $A_{r+1}, \dots, A_u$  mindestens eins der Fache oder Faktoren  $a_{m+1} \dots a_n$  enthalten, also mindestens ein Fach mit  $C = [a_{m+1} \dots a_n]$  gemein haben. Die Fläche  $[A_{r+1}C], \dots, [A_uC]$  sind aber in Bezug auf die Fache  $a_1 \dots a_n$  nach 164 reine, mithin null, da sie gleiche Fache oder Faktoren enthalten, also wird

$$[AC] = [(\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_r A_r)C] = \alpha_1 [A_1 C] + \dots + \alpha_r [A_r C].$$

Also ist

$$[B(AC)] = \alpha_1 [B(A_1 C)] + \dots + \alpha_r [B(A_r C)].$$

Da nun jede der Grössen  $A_1, \dots, A_r$  aus Fachen oder Faktoren besteht, die in  $B$  enthalten sind, so ist jede derselben dem  $B$  unter-



geordnet, folglich, da auch die Summe der Klassen von B und C n beträgt, so ist  ${}^n[BC]$  eine Zahl und ist nach 157

$$\text{also } {}^n[B(A_1C)] = {}^n[BCA_1], \dots, {}^n[B(A_rC)] = {}^n[BCA_r],$$

$${}^n[B(AC)] = {}^n[BC(\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_r A_r)] = {}^n[BCA'].$$

Also, da  ${}^n[BC]$  eine Zahl ist, so ist nach 4

$$A' = \frac{{}^n[B(AC)]}{{}^n[BC]}.$$

182. Satz. Jede Gleichung, deren Glieder Vielfache je einer Gröse mter Klasse sind, bleibt bestehen, wenn man statt aller dieser Grösen ihre in demselben Sinne genommenen Zurückleitungen setzt; oder

Wenn  $P = \alpha A + \beta B + \dots$  ist, wo  $\alpha, \beta, \dots$  Zahlen sind und  $P', A', B', \dots$  die in gleichem Sinne genommenen Zurückleitungen von  $P, A, B, \dots$  sind, so ist auch  $P' = \alpha A' + \beta B' + \dots$ .

Beweis. Es sei L das Gebiet, auf welches zurückgeleitet wird, und M das ausgeschlossene Gebiet und  ${}^n[LM] = 1$ , so erhält man aus der Gleichung

$$P = \alpha A + \beta B + \dots,$$

wenn man sie mit M modelt

$${}^n[PM] = \alpha {}^n[AM] + \beta {}^n[BM] + \dots$$

und wenn man diese mit L flacht

$${}^n[L(PM)] = \alpha {}^n[L(AM)] + \beta {}^n[L(BM)] + \dots,$$

d. h. nach 181

$$P' = \alpha A' + \beta B' + \dots$$

183. Satz. Die fortschreitende Zurückleitung eines rein fortschreitenden und die rückschreitende eines rein rückschreitenden Enflaches ist gleich dem Enflache der in demselben Sinne genommenen Zurückleitungen der Fache oder Faktoren jenes Flaches, oder

Wenn das reine Enflach  $P = {}^n[AB \dots E]$  ist, und  $P', A', B', \dots E'$  die in gleichem Sinne genommenen Zurückleitungen von  $P, A, B, \dots E$  sind (und zwar fortschreitende bezüglich rückschreitende, je nachdem das Flach fortschreitend oder rückschreitend ist), so ist auch

$$P' = {}^n[A'B' \dots E'].$$

Beweis. Es sei  $A = {}^n[a_1 \dots a_h]$ ,  $B = {}^n[a_{h+1} \dots a_i]$ ,  $\dots$   
 $E = {}^n[a_{t+1} \dots a_v]$ , wo  $a_1 \dots a_v$  Grösen erster bezüglich  $(n-1)$ ter



Klasse find, je nachdem das Enflach  ${}^n[AB \dots E]$  ein fortschreitendes oder rückschreitendes ist. Dann ist

$$P = {}^n[a_1 \dots a_v]$$

ein reines Enflach von Größen erster oder  $(n - 1)$ ter Klasse. Ferner sei  $L = {}^n[u_1 \dots u_l]$  das Gebiet, auf welches zurückgeleitet wird,  $M = {}^n[u_{l+1} \dots u_n]$  das ausgeschlossene Gebiet und  $[LM] = 1$ , wobei  $u_1 \dots u_n$  Größen erster oder  $(n - 1)$ ter Klasse find, je nachdem  $a_1 \dots a_v$  es find. Nun ist nach 181

$$\begin{aligned} P' &= {}^n[L(PM)] \\ &= {}^n[u_1 \dots u_l(a_1 \dots a_v \cdot u_{l+1} \dots u_n)]. \end{aligned}$$

Wenn nun das ursprüngliche Enflach  ${}^n[AB \dots E]$  ein fortschreitendes ist, so soll auch die Zurückleitung eine fortschreitende sein, mithin nach 180 die Stufe von  $L$  eben so gros oder gröser als die Klasse von  $P$  sein, d. h.  $m \geq v$ , folglich  $v + n - m < n$ , d. h. das Enflach  ${}^n[a_1 \dots a_v \cdot u_{l+1} \dots u_n]$  ein rein fortschreitendes, also auch  $= {}^n[a_1 \dots a_v u_{l+1} \dots u_n]$ , und da alle Fache oder Faktoren von erster Klasse find, nach 133 und 115 ein Einheitsflach. Die Größen  $a_1 \dots a_v$  seien nun Vielfachensummen von  $u_1 \dots u_m$  und sei  $a_r = {}^r\alpha_1 u_1 + \dots + {}^r\alpha_l u_l$ , so können wir in dem Enflache  ${}^n[a_1 \dots a_v u_{l+1} \dots u_n]$  statt  $a_r = {}^r\alpha_1 u_1 + \dots + {}^r\alpha_l u_l$  die Zurückleitung von  $a_r$  auf das Gebiet  $L = {}^n[u_1 \dots u_l]$ , mit Ausschluss des Gebietes  $M = {}^n[u_{l+1} \dots u_n]$ , d. h.  $a'_r = {}^r\alpha_1 u_1 + \dots + {}^r\alpha_l u_l$  setzen, da  $u_{l+1} \dots u_n$  bereits als Fache oder Faktoren in jenem Fläche vorkommen und  $u_{l+1} \cdot u_{l+1} = u_n \cdot u_n = 0$  ist. Mithin wird

$$P' = {}^n[u_1 \dots u_l \cdot a'_1 \dots a'_v u_{l+1} \dots u_n].$$

Hier ist  $a'_1 \dots a'_v$  dem  $u_1 \dots u_l$  untergeordnet, also nach 157

$$P' = {}^n[u_1 \dots u_n] \cdot {}^n[a'_1 \dots a'_v] = {}^n[a'_1 \dots a'_v].$$

Aus gleichem Grunde ist

$$A' = {}^n[a'_1 \dots a'_h], \quad B' = {}^n[a'_{h+1} \dots a'_i], \dots$$

$$E' = {}^n[a'_{t+1} \dots a'_v].$$

Mithin ist

$$P' = {}^n[A'B' \dots E'].$$

2. Wenn das ursprüngliche Enflach  ${}^n[AB \dots E]$  ein rückschreitendes ist, und ebenso auch die Zurückleitung von  $P$  auf  $L$ , unter Ausschluss



von  $M$ , eine rückschreitende, so ist die Klasse von  $P$  kleiner oder ebenfogros als die Stufe von  $L$ , mithin kehrt sich das rückschreitende Flach und ebenso die rückschreitende Zurückleitung, wenn wir statt der Grösen ihre Ergänzungen nehmen, nach 165 und 131 in das fortschreitende Flach und in die fortschreitende Zurückleitung um. Seien daher  $P_1, Q_1, R_1, A_1, B_1, \dots E_1$  die Ergänzungen von  $P, Q, R, A, B, \dots E$ , und seien  $P'_1, A'_1, B'_1, \dots E'_1$  die Zurückleitungen von  $P_1, A_1, B_1, \dots E_1$  auf  $Q_1$ , unter Ausschluss von  $R_1$ , so ist nach 151

$$P_1 = \overset{n}{[A_1 B_1 \dots E_1]},$$

und nach Beweis 1

$$P'_1 = \overset{n}{[A'_1 B'_1 \dots E'_1]}. \quad (a)$$

Ferner ist nach 181

$$P' = \overset{n}{[L(PM)]}, P'_1 = \overset{n}{[L_1(P_1 M_1)]} = \overset{n}{[L(PM)]} \quad (\text{nach 148}),$$

also  $P'_1 = \overline{P'}$  und ebenso  $A'_1 = \overline{A'}$ ,  $B'_1 = \overline{B'}$  ..., also (nach a)

$$\overline{P'} = \overset{n}{[\overline{A'} \overline{B'} \dots \overline{E'}]}, \text{ mithin nach 151}$$

$$P' = \overset{n}{[A' B' \dots E']}.$$

3. Seien endlich  $A, B, \dots E$  zusammengesetzte Grösen und zwar

$$A = S\alpha_r A_r, B = S\beta_s B_s, \dots E = S\varepsilon_v E_v,$$

wo  $A_r, B_s, \dots E_v$  einfache Grösen sind und seien  $A'_r, B'_s, \dots E'_v$  die Zurückleitungen von  $A_r, B_s, \dots E_v$ , so ist

$$P = \overset{n}{[S\alpha_r A_r \cdot S\beta_s B_s \dots S\varepsilon_v E_v]} = S\alpha_r \beta_s \dots \varepsilon_v \overset{n}{[A_r B_s \dots E_v]} \\ = S\alpha_r \beta_s \dots \varepsilon_v P_{r,s,\dots v}, \text{ wenn } P_{r,s,\dots v} = \overset{n}{[A_r B_s \dots E_v]} \text{ ist.}$$

Also nach 182

$$P' = S\alpha_r \beta_s \dots \varepsilon_v P'_{r,s,\dots v} = S\alpha_r \beta_s \dots \varepsilon_v \overset{n}{[A'_r B'_s \dots E'_v]}$$

nach Beweis 1 und 2; und also nach 75

$$P' = \overset{n}{[S\alpha_r A'_r S\beta_s B'_s \dots S\varepsilon_v E'_v]}, \text{ mithin nach 182} \\ = \overset{n}{[A' B' \dots E']}.$$

184. **Satz.** Das reine Enflach von Grösen erster Klasse oder von Grösen  $(n-1)$ ter Klasse in einem Hauptgebiete  $n$ ter Stufe ist ein Einheitsflach dieser Grösen.

Beweis. Das reine Enflach von Grösen erster Klasse ist nach 164 und 133 ein fortschreitendes, also nach 133 und nach 115 auch ein Einheitsflach, mithin ist auch das reine Enflach von beliebigen Grösen erster Klasse ein Einheitsflach dieser Grösen. Ebenso ist auch das reine Enflach von Grösen  $(n-1)$ ter Klasse ein Einheitsflach dieser



Größen, denn nach 151 ist es genau denselben Gesetzen unterworfen wie das Flach von Größen erster Klasse.

**Satz.** Eine Gleichung, deren Glieder Größen  $m$ ter Klasse sind, 185. wird, wenn  $n$  die Stufe des Hauptgebietes ist, durch so viel Zahlgleichungen ersetzt, als es Ausgeschiede (Komplexionen ohne Wiederholung) aus  $n$  Einfachen oder Elementen zur  $m$ ten Klasse giebt, und zwar erhält man einen ersetzenden Verein von Gleichungen, indem man die gegebene Gleichung nach und nach mit den Geschiedsflächen (multiplikativen Kombinationen) zur  $(n - m)$ ten Klasse aus einer beliebigen Schar von  $n$  Größen erster Klasse, deren Enflach 1 ist, flacht.

Beweis. Die gegebene Gleichung sei

$$P = A + B + \dots$$

wo  $P, A, B, \dots$  Größen  $m$ ter Klasse; es seien ferner  $e_1, \dots, e_n$  Größen erster Klasse, deren Enflach  ${}^n[e_1 \dots e_n] = 1$  ist, und seien  $E_1, E_2, \dots, E_v$  die Geschiedsfläche zur  $m$ ten Klasse aus  $e_1, \dots, e_n$ , und  $F_1, F_2, \dots, F_v$  die ergänzenden Geschiedsfläche, d. h. die Geschiedsfläche aus denselben Einheiten zur  $(n - m)$ ten Klasse und zwar so geordnet, dass  ${}^n[E_1 F_1] = {}^n[E_2 F_2] = \dots = {}^n[E_v F_v] = 1$  sei, so muss bewiesen werden, dass die obige Gleichung durch den Verein von Gleichungen ersetzt wird.

$${}^n[PF_\alpha] = {}^n[AF_\alpha] + {}^n[BF_\alpha] + \dots$$

wo  $\alpha$  die Werte von 1 bis  $v$  erhält. Nach 108 sind die Größen  $P, A, B, \dots$  Vielfachensummen von  $E_1 \dots E_v$ . Nun sei

$$P = \pi_1 E_1 + \dots + \pi_v E_v, \quad A = \alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_v E_v, \\ B = \beta_1 E_1 + \dots + \beta_v E_v, \dots$$

so ist

$${}^n[PF_\alpha] = {}^n[S\pi_\beta E_\beta F_\alpha] = S\pi_\beta {}^n[E_\beta F_\alpha].$$

Aber da  $E_\beta$  und  $F_\alpha$ , wenn  $s \geq r$  ist, notwendig gleiche Einheiten ( $e_1, \dots, e_n$ ) als Fache oder Faktoren enthalten, so ist für diesen Fall  ${}^n[E_\beta F_\alpha] = 0$ , also

$${}^n[PF_\alpha] = \pi_\alpha {}^n[E_\alpha F_\alpha] = \pi_\alpha$$

Aus gleichem Grunde ist

$${}^n[AF_\alpha] = \alpha_\alpha, \quad {}^n[BF_\alpha] = \beta_\alpha, \dots$$

Gilt nun die Gleichung  $P = A + B + \dots$ , so gilt auch die aus ihr durch Modlung hervorgegangene Gleichungsgruppe

$${}^n[PF_\alpha] = {}^n[AF_\alpha] + {}^n[BF_\alpha] + \dots$$



Gilt umgekehrt die letztere, so hat man für jedes  $\alpha$  von  $1 \dots v$ , wenn man für  ${}^n[P\alpha]$ ,  ${}^n[A\alpha]$ ,  ${}^n[B\alpha]$ ,  $\dots$  die gefundenen Werte setzt,

$$\pi_\alpha = \alpha_\alpha + \beta_\alpha + \dots, \text{ also auch } \pi_\alpha E_\alpha = \alpha_\alpha E_\alpha + \beta_\alpha E_\alpha + \dots$$

für jedes  $\alpha$  von 1 bis  $v$ . Addirt man diese sämtlichen Gleichungen, so erhält man

$$S\pi_\alpha E_\alpha = S\alpha_\alpha E_\alpha + S\beta_\alpha E_\alpha + \dots,$$

d. h.

$$P = A + B + \dots$$

Somit ersetzen sich die Gleichung  $P = A + B + \dots$  und der Gleichungsverein  ${}^n[P\alpha] = {}^n[A\alpha] + {}^n[B\alpha] + \dots$  gegenseitig und ist der Satz also bewiesen.

Befonders ist der Fall hervorzuheben, wenn  $A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \dots$  ist, dann ist

$${}^n[A\alpha_r] = \alpha_r,$$

$$\text{d. h. } {}^n[A\alpha_1] = \alpha_1, {}^n[A\alpha_2] = \alpha_2, \dots$$



## Vierter Abschnitt der Ausdehnungslehre: Die Innungslehre.

Einleitung. Wir haben in Satz 77 die innere Webung die Art der Webung oder Multiplikation genannt, für welche das Zeug oder Produkt zweier verschiedenen Einheiten null, das Zeug oder Produkt zweier gleichen Einheiten eins ist, d. h. für welche

$$E_a \cdot E_b = 0 \quad \text{und} \quad E_a \cdot E_a = E_b \cdot E_b = 1 \quad \text{ist.}$$

Dieselben Formeln gelten aber auch, wenn man, statt zwei Einheiten innerlich zu verweben, das Enflach aus einer Einheit und der Ergänzung einer Einheit nimmt; denn wie wir in Satz 186 sehen werden, gelten für die Enflache von Einheiten gleicher Klasse die Formeln

$$[E_a \bar{E}_b] = 0 \quad \text{und nach 128 auch} \quad [E_a \bar{E}_a] = [\bar{E}_b \bar{E}_b] = 1$$

Wir werden also die innere Webung so erklären können, dass das innere Zeug oder Produkt zweier Einheiten auf das Enflach einer Einheit in die Ergänzung der andern zurückgeführt wird und gelten dann für die innere Webung alle über die Enflache gewonnenen Sätze.

### 13. Die Grundgesetze der Innungslehre.

**Erklärung.** Das Innenzeug oder das innere Produkt 186. zweier Einheiten beliebiger Klassen ist das Enflach der ersten in die Ergänzung der zweiten, oder

Wenn  $E$  und  $F$  Einheiten beliebiger Klassen sind, so ist

$[E\bar{F}]$  das Innenzeug oder das innere Produkt der Einheiten  $E$  und  $F$ . Das Zeichen des Innenzeuges ist ein liegendes Kreuz, z. B.  $E \times F$  gelesen Innenzeug  $EF$ .

Ich habe das innere Produkt ein Innenzeug genannt, weil es ganz eigentümliche, keinem andern Zeuge oder Produkte zukommende Eigenschaften besitzt



und daher auch einer eigenen Benennung bedarf, welche im Deutschen nicht durch ein vorgesetztes Adjektiv gewonnen werden kann.

Da diese Art der Multiplikation ganz eigentümliche Gesetze hat, so muss sie auch, wenn man vor Verwechslungen sicher sein soll, ihr eigentümliches Zeichen haben, welches ich hiermit einführe.

187. **Satz.** Das Innenzeug oder das innere Produkt zweier gleichen Einheiten ist eins, das zweier verschiedenen Einheiten gleicher Klasse ist null, oder
- $$[E_r \bar{E}_r] = 1, [E_r \bar{E}_s] = 0.$$

**Beweis.** Nach 128 ist  $[E_r \bar{E}_r] = 1$ . Nach 127 aber ist  $\bar{E}_s$  dem Fläche aller in dem Fläche  $E_s$  nicht vorkommenden Einheiten erster Klasse gleich; da nun  $E_r$  von  $E_s$  verschieden ist und zugleich beide Fläche von einer gleichen Anzahl ursprünglicher Einheiten sind, so enthält  $E_r$  notwendig solche Einheiten als Fläche oder Faktoren, welche in  $E_s$  fehlen, mithin in  $\bar{E}_s$  vorkommen; also ist  $[E_r \bar{E}_s]$  nach 92 gleich Null.

188. **Satz.** Das Innenzeug oder das innere Produkt zweier Einheiten  $E$  und  $F$  ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn die eine der andern untergeordnet ist, oder

Es ist  $[E \bar{F}] = 0$ , wenn von  $E$  und  $F$  nicht eine der andern untergeordnet; dagegen ist  $[E \bar{F}] > 0$ , wenn von  $E$  und  $F$  eine der andern untergeordnet ist.

**Beweis.** Der Satz ist für Einheiten gleicher Klasse in 187 bewiesen. Wenn ferner  $E$  und  $F$  zwei Einheiten verschiedener Klasse sind, und zwar  $E$  von höherer Klasse als  $F$  ist, so setzen wir  $F = [E_1 G]$ , wo  $E_1$  dem  $E$  untergeordnet ist, aber das Gebiet  $G$  keine Gröse erster Klasse mit  $E$  gemein hat. Dann ist  $F$  dem  $E$  untergeordnet, sofern  $G$  von nullter Klasse, d. h. eine Zahl ist. Dagegen nicht dem  $E$  untergeordnet, wenn  $G$  von erster oder höherer Klasse ist. Es sei ferner  $E = [E_1 E_2]$  und sei  $[E_1 G E_2 H] = 1$  das Zeug aller  $n$  ursprünglichen Einheiten. Dann ist nach 139 das Flach  $[E_2 H]$  die Ergänzung von  $F = [E_1 G]$ , d. h.  $\bar{F} = \bar{[E_1 G]} = [E_2 H]$ , also

$$[E \bar{F}] = [E_1 E_2 (\bar{E_1 G})] = [E_1 E_2 (E_2 H)].$$

Wenn nun  $F$  dem  $E$  untergeordnet ist, so ist, wie oben gezeigt,  $G$  von nullter Klasse, mithin da  $[E_1 G E_2 H] = 1$  auch  $[E_1 E_2 H]$  von nullter Klasse, also nach 156<sub>2</sub> der Ausdruck  $[E \bar{F}] = [E_1 E_2 (E_2 H)]$



$= [E_1 E_2 H \cdot E_2]$ , wo  $E_2$  und  $[E_1 E_2 H]$  von Null verschieden sind, also auch das Zeug oder Produkt, d. h.  $[EF] \geq 0$ .

Wenn dagegen  $F$  dem  $E$  nicht untergeordnet ist, so ist  $G$  von erster oder höherer Klasse, und dann ist die Summe der Klassen von  $E_1$ ,  $E_2$  und  $H$  geringer als die Summe der Klassen von  $E_1$ ,  $G$ ,  $E_2$ ,  $H$ , d. h. kleiner als  $n$ , also nach 158  $[EF] = [E_1 E_2 \cdot E_2 H] = 0$ .

**Satz.** Wenn  $E$  und  $F$  Einheiten sind und  $[EF] \geq 0$ , so ist 189.

$$[EFE] = F \text{ und } [F(EF)] = \bar{E}.$$

Beweis. Es sei  $[EFG] = 1$  das Enflach aller Einheiten erster Klasse, so ist  $\bar{E} = [FG]$ , mithin nach 156<sub>2</sub>

$$\begin{aligned} [EFE] &= [EF(FG)] = [EFGF] \\ &= F. \end{aligned}$$

Ferner ist dann, da  $[EFG] = 1$  auch  $\bar{[EF]} = G$ , mithin  $[F(EF)] = [FG] = \bar{E}$ .

**Satz.** Wenn  $E$ ,  $F$ ,  $G$  Einheiten sind, und weder  $[EF]$  noch  $[EG]$  null ist, so ist, wenn  $F$  von höherer Klasse ist als  $G$

$$[EF(\bar{EG})] = [F\bar{G}],$$

wenn dagegen  $G$  von höherer Klasse ist als  $F$ , so ist  $[FE(\bar{GE})] = [F\bar{G}]$ .

Sind  $F$  und  $G$  von gleicher Klasse, so sind beide Formeln gültig.

Beweis. Wenn von  $F$  und  $G$  nicht eine der andern untergeordnet ist, so sind auch  $[EF]$  und  $[EG]$  nicht eine der andern untergeordnet, also sind dann nach 188 beide Seiten der zu erweisenden Gleichung null.

1. Wenn  $G$  dem  $F$  untergeordnet ist, so sei  $F = [GH]$ . Dann ist

$$[EF(\bar{EG})] = [EGH(\bar{EG})] = H \quad (189)$$

$$= [GH\bar{G}] \quad (189)$$

$$= [F\bar{G}].$$

2. Wenn  $F$  dem  $G$  untergeordnet ist, so sei  $G = [HF]$ . Dann ist

$$[FE(\bar{GE})] = [FE(\bar{HFE})] = \bar{H} \quad (189)$$

$$= [F(\bar{HF})] \quad (189)$$

$$= [F\bar{G}].$$



Wenn  $F$  und  $G$  von gleicher Klasse sind, und wenn dabei jede der andern untergeordnet ist, so müssen beide zusammenfallen, mithin ist nach 107 sowohl  $G$  dem  $F$ , als  $F$  dem  $G$  untergeordnet, und es gelten mithin beide Formeln.

191. **Satz.** Das Innenzeug oder das innere Produkt zweier beliebigen Größen ist gleich dem Enfläche der ersten in die Ergänzung der zweiten, oder

$$\text{Es ist } A \times B = {}^n[\overline{AB}].$$

Beweis. Es seien  $A_1, \dots, A_n$  die Einheiten, deren Vielfachen-  
summe  $A$ , und seien  $B_1, \dots, B_m$  die Einheiten, deren Vielfachen-  
summe  $B$ .

Es sei  $A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n$  und  $B = \beta_1 B_1 + \dots + \beta_m B_m$ , wo  
 $A_1 \dots A_n$  die Einheiten, deren Vielfachen-  
summe  $A$  ist und ebenso  
 $B_1 \dots B_m$  die Einheiten, deren Vielfachen-  
summe  $B$  ist und bezeichne  
 $A \times B$  in diesem Satze das Innenzeug oder das innere Produkt, so ist  
 $A \times B = (\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n) \times (\beta_1 B_1 + \dots + \beta_m B_m) = S \alpha_a \beta_b (A_a \times B_b)$  (74),  
wo sich die Summe auf die Werte  $1, \dots, n$  für  $a$  und auf  $1, \dots, m$  für  $b$   
bezieht. Da nun  $A_a$  und  $B_b$  Einheiten sind, so ist nach 186  $A_a \times B_b$   
 $= {}^n[A_a \overline{B_b}]$ , mithin ist

$$A \times B = S \alpha_a \beta_b {}^n[A_a \overline{B_b}] = {}^n[S \alpha_a A_a S \beta_b \overline{B_b}] \quad (74)$$

$$= {}^n[AS \beta_b \overline{B_b}] = {}^n[A \overline{(S \beta_b B_b)}] \quad (150)$$

$$= {}^n[\overline{AB}].$$

192. **Satz.** Wenn  $\alpha$  und  $\beta$  die Klassen von  $A$  und  $B$  sind und  
 $\alpha < \beta$  ist, so ist

$${}^n[\overline{AB}] = (-1)^{\alpha(\beta-1)} {}^n[\overline{BA}], \text{ oder}$$

Es ist  ${}^n[\overline{AB}]$  der Ergänzung von  ${}^n[\overline{BA}]$  gleich, nur wenn die  
Klasse von  $A$  ungerade und zugleich die von  $B$  gerade ist, dann ist  
 ${}^n[\overline{AB}]$  der Ergänzung von  ${}^n[\overline{BA}]$  entgegengesetzt.

Beweis. Es ist

$${}^{-n}[\overline{BA}] = {}^n[\overline{\overline{BA}}] \quad (147)$$

$$= (-1)^{\alpha(n-\alpha)} {}^n[\overline{B \cdot A}] \quad (132)$$

$$= (-1)^{\alpha(n-\alpha)} (-1)^{\alpha(n-\beta)} {}^n[\overline{AB}] \quad (89)$$

$$= (-1)^{\alpha(2n-\alpha-\beta)} {}^n[\overline{AB}].$$

Es ist aber  $(2n - \alpha - \beta)$  deckend mit  $\alpha(\beta - \alpha)$  oder deckend  
mit  $\alpha(\beta - 1)$ , da  $\alpha^2$  mit  $\alpha$  gleichzeitig gerade oder ungerade ist,  
mithin ist



$$\overline{[B\bar{A}]}^n = (-1)^{\alpha(\beta-1)} [A\bar{B}]^n, \text{ oder auch}$$

$$[A\bar{B}]^n = (-1)^{\alpha(\beta-1)} \overline{[B\bar{A}]}^n.$$

Durch den so eben erwiesenen Satz kann man den Fall, wo das zweite Fach eines inneren Zeuges oder Produktes von höherer Klasse ist als das erste, immer auf den andern Fall zurückführen, wo das erste Fach von höherer Klasse ist als das zweite. Diesen letztern Fall legen wir daher in der Regel der Betrachtung zu Grunde.

**Satz.** Die Klasse des Innenzeuges oder innern Produktes, dessen beide Fache oder Faktoren nach der Reihe die Klassen  $\alpha$  und  $\beta$  haben, während die Stufe des Hauptgebietes  $n$  beträgt, ist, wenn  $\beta > \alpha$  ist, gleich  $\alpha + n - \beta$ , dagegen, wenn  $\beta \leq \alpha$  ist, gleich  $\alpha - \beta$ .

Beweis. Es seien  $A$  und  $B$  die beiden Fache oder Faktoren, deren Klassen beziehlich  $\alpha$  und  $\beta$  sind, so ist die Klasse von  $\bar{B}$  gleich  $n - \beta$ .

Wenn demnach  $\beta > \alpha$  ist, so ist auch  $n$  gröser als  $\alpha + n - \beta$ ; d. h. die Summe der Klassen von  $A$  und  $\bar{B}$  ist kleiner als die Stufe des Hauptgebietes, also ist nach 133 die Klasse des Flaches  $[A\bar{B}]^n$  gleich jener Summe, d. h. gleich  $\alpha + n - \beta$ .

Wenn dagegen  $\beta \leq \alpha$  ist, so ist auch  $n$  eben so gros oder kleiner als  $\alpha + n - \beta$ , d. h. die Summe der Klassen von  $A$  und  $\bar{B}$  ist eben so gros oder gröser als  $n$ , also nach 145 die Klasse des Flaches  $[A\bar{B}]^n$  um  $n$  kleiner als jene Summe, d. h. gleich  $\alpha - \beta$ .

**Satz.** Die Anzahl der Einheiten, deren Vielfachensumme ein Innenzeug oder inneres Produkt ist, ist gleich der Anzahl der Geschiede aus so viel Einheiten, als die Stufenzahl des Hauptgebietes, und zur so vielen Klasse, als der Unterschied der Klassen der beiden Fache oder Faktoren beträgt.

Beweis. Nach 193 ist die Klasse des innern Zeuges oder Produktes entweder gleich  $n + \alpha - \beta$ , oder gleich  $\alpha - \beta$ , je nachdem  $\beta$  gröser als  $\alpha$  ist, oder nicht. Die Einheiten von gleicher Klasse sind im ersten Falle die Geschiedsfläche aus den  $n$  Einheiten erster Klasse zur  $(n + \alpha - \beta)$ ten, im zweiten zur  $(\alpha - \beta)$ ten Klasse. Aber die Anzahl der Geschiede aus  $n$  Einfachen zur  $(n + \alpha - \beta)$ ten Klasse ist nach Zahlenlehre 390 gleich der Anzahl der Geschiede aus  $n$  Einfachen zur  $(\beta - \alpha)$ ten Klasse.\*) Die Klassenzahl ist dann im ersten

\*) Nach Zahlenlehre 390 ist  $p \cdot m = \frac{p!}{m!(p-m)!} = p \cdot p - m$ .



Falle  $\beta - \alpha$ , im zweiten Falle ist sie  $\alpha - \beta$ , in beiden Fällen also den Unterschieden von  $\alpha$  und  $\beta$  gleich.

195. **Satz.** Das Innenzeug oder innere Produkt zweier Größen gleicher Klasse ist eine Zahl und zwar

Wenn  $E_1 \dots E_m$  sämtlich Einheiten von a-ter Klasse sind, so ist

$$\overset{n}{[(\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m)(\beta_1 E_1 + \dots + \beta_m E_m)]} = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_m \beta_m.$$

Beweis. Der Unterschied der Klassen ist in diesem Falle null, also das Zeug nach 194 nullter Klasse, d. h. eine Zahl. Und zwar, wenn wir

$$\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m = S_{1,m} \alpha_a E_a \quad \text{und} \quad \beta_1 E_1 + \dots + \beta_m E_m = S_{1,m} \beta_b E_b \quad \text{setzen,}$$

so ist

$$\overset{n}{\left[ \left( S_{1,n} \alpha_a E_a \right) \overline{(S \beta_b E_b)} \right]} = S \alpha_a \beta_b \overset{n}{[E_a \bar{E}_b]} \quad (\text{nach 74}).$$

Nun ist nach 187 das Zeug  $\overset{n}{[E_a \bar{E}_b]}$ , wenn  $a$  und  $b$  verschieden sind, gleich null, und wenn  $a$  und  $b$  gleich ist, gleich 1, mithin wird das obige Zeug

$$= S \alpha_a \beta_a = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_m \beta_m.$$

196. **Satz.** Wenn  $E_1, \dots E_m$  Einheiten von beliebiger, aber von gleicher Klasse sind, so ist

$$\overset{n}{[(\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m)(\beta_1 E_1 + \dots + \beta_m E_m)]} = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_m \beta_m.$$

Beweis. Es sei  $\alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_m E_m$  mit  $S \alpha_r E_r$ , und  $\beta_1 E_1 + \dots + \beta_m E_m$  mit  $S \beta_s E_s$  bezeichnet, so ist

$$\overset{n}{[(S \alpha_r E_r)(S \beta_s E_s)]} = S \alpha_r \beta_s \overset{n}{[E_r \bar{E}_s]} \quad (74).$$

Nun ist nach 187 das Zeug  $\overset{n}{[E_r \bar{E}_s]}$  gleich null, wenn  $E_r$  und  $E_s$  verschiedene Einheiten sind und gleich eins, wenn  $r$  gleich  $s$  ist, somit wird der gewonnene Ausdruck

$$= S \alpha_r \beta_r = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_m \beta_m.$$

197. **Satz.** Die beiden Fache eines Innenzeuges (die beiden Faktoren eines inneren Produktes) sind vertauschbar, wenn sie von gleicher Klasse sind, oder

$$\overset{n}{[A \bar{B}]} = \overset{n}{[B \bar{A}]}, \quad \text{wenn } A \text{ und } B \text{ von gleicher Klasse sind.}$$

Beweis. Es mögen  $E_1, \dots E_m$  die Einheiten darstellen, welche mit  $A$  und  $B$  von gleicher Klasse sind und sei  $A = S \alpha_a E_a$ ,  $B = S \beta_b E_b$ , so ist nach 195

$$\overset{n}{[A \bar{B}]} = S \alpha_a \beta_a = S \beta_a \alpha_a = \overset{n}{[B \bar{A}]}.$$

198. **Erklärung.** Das Innenquader oder das innere Quadrat einer Gröse  $A$  heist das Enflach  $\overset{n}{[A \bar{A}]}$ .



Das Zeichen des Innenquaders von  $A$  ist  $A^2$  gelesen Innenquader von  $A$ .

Satz. Das Innenquader jeder Gröse ist eine Zahl und zwar ist 199.

$$(\alpha_1 \mathbf{E}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{E}_m)^2 = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_m^2.$$

Beweis.  $(\alpha_1 \mathbf{E}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{E}_m)^2$

$$= [(\alpha_1 \mathbf{E}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{E}_m) (\alpha_1 \mathbf{E}_1 + \dots + \alpha_m \mathbf{E}_m)] \quad (198)$$

$$= \alpha_1 \alpha_1 + \dots + \alpha_m \alpha_m \quad (197).$$

Erklärung. Der Zahlwert (numerische Wert) einer Gröse  $A$  200. heist die 2te Tiefe (die positive Quaderwurzel) aus dem Innenquader diefer Gröse. Zahlwertig gleich (numerisch gleich) heisen zwei Grösen von gleichem Zahlwerte, d. h. deren Innenquader gleich find.

Diese Erklärung stimmt mit den in der Zahlenlehre bei den Zahlen und bei den Winkelgrösen (imaginären Grösen) gegebenen Erklärungen; denn der Zahlwert von  $+a$  und  $-a$  ist dort als  $(\pm a^2)^{1/2} = a$  und der von  $a + ib$  als  $(a^2 + b^2)^{1/2}$  erklärt. In der Raumlehre ist entsprechend der Zahlwert einer Linie die Länge derselben gemessen durch die Längeneinheit, u. f. w.

#### 14. Normverein und Kreifeländerung.

Erklärung. Normig zu einander heisen zwei von Null 201. verschiedene Grösen, deren Innenzeug oder inneres Produkt null ist. Zwei Gebiete heisen normig zu einander, wenn ihre Teile es find.

Allfeitig normig zu einander heisen zwei Gebiete, wenn jede Gröse erster Klasse, die dem einen Gebiete angehört, zu jeder, die dem andern angehört, normig ist; und allfeitig normig zu einander heisen zwei Grösen, wenn ihre Gebiete es find.

Nimmt man in dem Raume die ursprünglichen Einheiten als gleich lange zu einander senkrechte Strecken an, wie dies stets geschehen muss, so zeigt sich leicht, dass das innere Zeug oder Produkt zweier Strecken dann und nur dann null ist, wenn diese Strecken senkrecht zu einander find.

Erklärung. Ein Normverein (ein Normalsystem) nter 202. Stufe heist ein Verein von  $n$  zahlwertig gleichen (von Null verschiedenen) Grösen erster Klasse, von denen jede zu jeder normig ist.

Ein vollständiger Normverein heist er, wenn  $n$  zugleich die Stufe des Hauptgebietes ist. Der Zahlwert jener  $n$  Grösen heist zugleich der Zahlwert des Normvereins.

Einfach heist der Normverein, dessen Zahlwert 1 ist.

Im Raume bilden z. B. drei gleichlange und gegen einander senkrechte Strecken einen Normverein.



203. **Satz.** Der Verein der ursprünglichen Einheiten erster Klasse ist ein vollständiger Normverein vom Zahlwerte 1.

Beweis. Es seien  $e_1, \dots, e_n$  die ursprünglichen Einheiten, so ist nach 187

$$1 = e_1^2 = \dots = e_n^2$$

$$0 = [e_1 \overline{e_2}] = \dots$$

204. **Erklärung.** Eine Kreifeländerung heist jede Umgestaltung eines Vereins, durch welche 2 Größen  $a$  und  $b$  des Vereins sich beziehlich in  $xa + yb$  und in  $\pm(xb - ya)$  verwandeln, wo  $x^2 + y^2 = 1$  ist.

Die Kreifeländerung heist eine Plusänderung (eine positive), wenn  $a$  und  $b$  sich in  $xa + yb$  und  $+(xb - ya)$  verwandeln, eine Strichänderung (eine negative), wenn  $a$  und  $b$  sich in  $xa + yb$  und  $-(xb - ya)$  verwandeln.

Wenn hierbei  $x = \cos \alpha$  und  $y = \sin \alpha$  ist, und  $a$  und  $b$  zahlwertig gleich und zu einander normig sind, so sagt man, der Verein habe sich von  $a$  nach  $b$  hin um den Winkel  $\alpha$  geändert.

Wenn im Raume  $a$  und  $b$  zwei gleichlange und zu einander senkrechte Strecken darstellen, so sieht man leicht, dass durch die Kreifeländerung, durch welche  $a$  in  $a_1 = a \cos \alpha + b \sin \alpha$ ,  $b$  in  $b_1 = b \cos \alpha - a \sin \alpha$  übergeht,  $a_1$  und  $b_1$  von derselben Länge sind wie  $a$  und  $b$  und gegen einander senkrecht bleiben. Es bleiben also  $a$  und  $b$  bei jener Änderung normige oder senkrechte Halbmesser eines festen Kreifes. Und ist der Winkel von  $a$  bis  $a_1$  gleich  $\alpha$ . Sind dagegen  $a$  und  $b$  beliebige Strecken, so werden  $a_1$  und  $b_1$  normige Halbmesser einer bestimmten Ellipse, in welcher auch  $a$  und  $b$  normige Halbmesser sind.

205. **Satz.** Jeder Normverein geht durch Kreifeländerung in einen zahlwertig gleichen Normverein über.

Beweis. Es seien  $a, b, c, \dots$  die Größen eines Normvereins, d. h. nach 201, es sei  $a^2 = b^2 = c^2 = \dots$  und sei  $0 = [a \overline{b}] = [a \overline{c}] = [b \overline{c}] = \dots$ . Nun ändere sich durch Kreifeländerung  $a$  in  $a_1 = xa + yb$  und  $b$  in  $b_1 = xb - ya$ , wo  $x^2 + y^2 = 1$  ist, so ist zu zeigen, dass  $a_1, b_1, c, \dots$  einen Normverein bilden, in welchem  $a_1^2 = a^2$  ist. Es ist, da  $[a \overline{b}] = 0$  ist,

$$\begin{aligned} a_1^2 &= (xa + yb)^2 = x^2 a^2 + y^2 b^2, \text{ d. h. da } b^2 = a^2 \\ &= (x^2 + y^2) a^2, \text{ d. h. da } x^2 + y^2 = 1 \\ &= a^2. \end{aligned}$$

Aus gleichem Grunde ist  $b_1^2 = a^2$ . Ferner ist, da  $[a \overline{b}] = 0$

$$\begin{aligned} [a_1 \overline{b_1}] &= [(xa + yb) \overline{(xb - ya)}] = xy(b^2 - a^2), \\ &= 0. \end{aligned} \quad \text{d. h. da } b^2 = a^2$$



Endlich ist

$$[a_1 \bar{c}] = [(xa + yb)\bar{c}] = x[ac] + y[b\bar{c}],$$

und dies gleich Null, weil  $[a\bar{c}]$  und  $[b\bar{c}] = 0$  sind. Aus gleichem Grunde ist  $[b_1 \bar{c}] = 0$  u. f. w. Folglich ist der Verein  $a_1, b_1, c, \dots$  ein Normverein, dessen Zahlwert gleich dem des gegebenen ist, da  $a_1^2 = a^2$ .

**Satz.** Das Enflach der Grösen eines Normvereins bleibt bei der 206. Kreifeländerung des Vereins unverändert, wenn die Aenderung eine Plusänderung (positiv) ist, erhält dagegen den entgegengesetzten Wert, wenn die Aenderung eine Strichänderung (negativ) ist.

Beweis. Es gehe  $a$  durch Kreifeländerung in  $a_1 = xa + yb$ ,  $b$  in  $b_1 = xb - ya$  über, wo  $x^2 + y^2 = 1$  ist; so wird

$$\begin{aligned} [a_1 b_1] &= [(xa + yb)(xb - ya)] \text{ und dies, da } [aa], [bb] \text{ nach 92 null sind,} \\ &= x^2[ab] - y^2[ba] \text{ und dies, da } [ba] = -[ab] \\ &= (x^2 + y^2)[ab] \quad (\text{nach 88}) \\ &= [ab], \text{ da } x^2 + y^2 = 1. \end{aligned}$$

Also  $[a_1 b_1] = [ab]$ . Kommen nun zu den gleichen Flächen  $[ab]$  und  $[a_1 b_1]$  noch an den entsprechenden Stellen gleiche Fache oder Faktoren hinzu, so bleiben die Fläche gleich.

Bei der Strichänderung wird

$$[a_1 b_1] = -[(xa + yb)(xb - ya)], \text{ mithin } = -[ab] \text{ und wird also das Flach entgegengesetzt, mithin bewiesen.}$$

**Satz.** Die Grösen eines Normvereins sind gegenseitig frei und 207. jede Gröse erster Klasse lässt sich als Vielfachenfumme der Grösen eines beliebigen vollständigen Normvereins darstellen.

Beweis. 1. Es seien  $a, b, c, \dots$  Grösen eines Normvereins. Gefetzt nun, es seien dieselben nicht gegenseitig frei, sondern lasse sich die eine als Vielfachenfumme der andern darstellen, etwa

$$a = \beta b + \gamma c + \dots,$$

so webe oder multiplizire man beide Seiten innerlich mit  $a$ , so wird

$$a^2 = \beta[b\bar{a}] + \gamma[c\bar{a}] + \dots$$

Hier ist  $[b\bar{a}], [c\bar{a}], \dots$  null nach 201. Also wäre  $a^2 = 0$ , im Widerspruche mit 202. Es lässt sich also keine der Grösen  $a, b, c, \dots$  als Vielfachenfumme der übrigen darstellen, d. h. nach 9 sie sind gegenseitig frei.



2. Ein vollständiger Normverein in einem Hauptgebiete  $n$ ter Stufe besteht nach 202 aus  $n$  Grösen, und da diese nach Beweis 1 gegenseitig frei sind, so kann nach 20 jede Gröse erster Stufe, da sie immer dem Hauptgebiete angehören muss, als Vielfachenfumme der  $n$  Grösen dargestellt werden.

208. **Satz.** Wenn eine Gröse  $A$  zu mehreren Grösen gleicher Stufe  $B, C, \dots$  normig ist, so ist sie auch zu jeder Gröse normig, welche eine Vielfachenfumme derselben ist.

Beweis. Wenn  $A$  zu  $B, C, \dots$  normig ist, so ist nach 201

$$0 = {}^n[A\bar{B}] = {}^n[A\bar{C}] = \dots$$

Also ist auch

$$\begin{aligned} {}^n[A(\beta B + \gamma C + \dots)] &= \beta {}^n[A\bar{B}] + \gamma {}^n[A\bar{C}] + \dots \\ &= 0. \end{aligned} \quad (74)$$

209. **Satz.** Alle Grösen erster Klasse, welche zu  $m$  Grösen eines vollständigen Normvereins  $n$ ter Stufe normig sind, gehören dem Gebiete der  $n - m$  übrigen Grösen des Vereines an.

Beweis. Es sei der Verein  $a_1, \dots, a_n$  ein vollständiger Normverein, und seien  $m$  seiner Grösen, etwa  $a_1, \dots, a_m$  zu irgend einer Gröse erster Klasse  $c$  normig, so ist zu zeigen, dass  $c$  dem Gebiete  $a_{m+1}, \dots, a_n$  angehört. Nach 207 lässt sich  $c$  als eine Vielfachenfumme der Grösen des vollständigen Normvereins  $a_1, \dots, a_n$  darstellen.

$$c = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n.$$

Hier ist, da  $c$  zu  $a_1$  normig ist, nach 201

$$\begin{aligned} 0 &= {}^n[a_1 \bar{c}] = \alpha_1 a_1^2 + \alpha_2 [a_1 \bar{a}_2] + \dots + \alpha_n [a_1 \bar{a}_n] \\ &= \alpha_1 a_1^2. \end{aligned}$$

Da nun  $a_1^2$  nach 202 nicht null ist, so folgt aus der Gleichung  $\alpha_1 a_1^2 = 0$ , dass  $\alpha_1 = 0$  ist. Auf gleiche Weise folgt, dass auch  $\alpha_2, \dots, \alpha_m$  null sind. Folglich ist

$$c = \alpha_{m+1} a_{m+1} + \dots + \alpha_n a_n,$$

d. h.  $c$  gehört dem Gebiete  $a_{m+1}, \dots, a_n$  an.

210. **Satz.** Jeder Normverein kann durch fortgesetzte Kreifeländerung so umgewandelt werden, dass eine seiner Grösen einer beliebig gegebenen Gröse erster Klasse aus dem Gebiete des Vereines gleich wird, sofern der Zahlwert der Gröse dem des Normvereins gleich ist.

Beweis. Es seien  $a_1, \dots, a_n$  die Grösen des gegebenen Normvereins, und sei  $c$  die gegebene Gröse, deren Zahlwert gleich  $a_1$  ist, auch sei

$$c = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n.$$



Man wandle nun  $a_1$  und  $a_2$  durch Kreifeländerung nach 204 so um, dass  $a_1$  in

$$c_2 = \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2}}$$

übergeht. Dann ist  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2} c_2$ , also

$$c = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2} c_2 + \alpha_3 a_3 + \dots + \alpha_n a_n.$$

Darauf wandle man  $c_2$  und  $a_3$  durch Kreifeländerung so um, dass  $c_2$  in

$$c_3 = \frac{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{1/2} c_2 + \alpha_3 a_3}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2}}$$

übergeht. Dann ist

$$c = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)^{1/2} c_3 + \alpha_4 a_4 + \dots + \alpha_n a_n.$$

In dieser Weise fahre man fort, bis

$$c = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)^{1/2} c_n \text{ wird.}$$

Nun ist nach der Bedingung des Satzes  $c$  zahlwertig gleich mit  $a_1$ , also nach 200

$$a_1^2 = c^2 = (\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n)^2$$

und da  $[a_1 \bar{a}_2]$ ,  $[a_1 \bar{a}_3]$  u. f. w. nach 187 gleich Null find,

$$a_1^2 = \alpha_1^2 a_1^2 + \dots + \alpha_n^2 a_n^2$$

und da nach 201 auch  $a_1^2 = a_2^2 = \dots = a_n^2$  ist, so wird

$$a_1^2 = (\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2) a_1^2 \quad \text{oder} \quad \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1,$$

mithin  $c = c_n$ ,

d. h. es ist durch fortgesetzte Kreifeländerung  $a_1$  in  $c_1, c_2, \dots, c_n = c$  verwandelt.

**Satz.** Zwei Normvereine gleichen Zahlwertes, deren Gebiete 211. eines dem andern gleich oder untergeordnet ist, können durch fortgesetzte Kreifeländerung so umgewandelt werden, dass, wenn sie von gleicher Stufe sind, das eine in das andere übergeht, wenn sie von ungleicher Stufe sind, das höherer Stufe die Größen des andern enthält.

**Beweis.** Es seien  $a_1, a_2, a_3, \dots$  und  $b_1, b_2, b_3, \dots$  zwei Normvereine gleichen Zahlwertes, auch sei das Gebiet  $b_1, b_2, b_3, \dots$  entweder von gleicher oder höherer Stufe als das von  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , so müssen nach 52 alle Größen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  dem Gebiete  $b_1, b_2, b_3, \dots$  angehören. Somit kann man nach 210 den Normverein  $b_1, b_2, b_3, \dots$  durch Kreifeländerung so umwandeln, dass eine seiner Größen  $= a_1$  wird. Der hierdurch erzeugte Normverein bestehe aus den Größen  $a_1, c_2, c_3, \dots$ .



Da nun  $a_2, a_3, \dots$ , als Größen des Normvereins  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , zu  $a_1$ , also zu einer Größe des Normvereins  $a_1, c_2, c_3, \dots$  normig sind, so müssen sie nach 209 dem Gebiete der übrigen Größen dieses Vereines, d. h. dem Gebiete  $c_2, c_3, \dots$  angehören. Demnach kann man wieder den Verein  $c_2, c_3, \dots$  durch Kreifeländerung so umwandeln, dass eine seiner Größen  $= a_2$  wird. Der hierdurch erzeugte Normverein bestehe aus den Größen  $a_2, d_3, d_4, \dots$ , so müssen wieder aus demselben Grunde, wie vorher,  $a_3, a_4, \dots$  dem Gebiete  $d_3, d_4, \dots$  angehören. Der Normverein  $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$  ist dann durch Kreifeländerungen übergegangen in  $a_1, a_2, d_3, d_4, \dots$ . So kann man, wenn der Verein  $b_1, b_2, \dots$  von höherer Stufe ist als  $a_1, a_2, \dots$ , fortfahren, bis der zuletzt hervorgehende Verein alle Größen des gegebenen Vereines  $a_1, a_2, a_3, \dots$  enthält. Sind beide Vereine von gleicher Stufe, so kann man fortfahren, bis der Verein alle Größen des Vereins  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , mit Ausnahme des letzten, enthält. Diese letzte Größe sei  $a_n$ , und sei der so hervorgehende Normverein  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, q$ , so muss nach der angewandten Schlussfolge  $a_n$  dem Gebiete  $q$  angehören, d. h. beide müssen in einer Zahlbeziehung zu einander stehen. Ist nun  $q = \beta a_n$ , wo  $\beta$  eine Zahl ist, so ist, da beide im Zahlwerte einander gleich sind,  $q^2 = a_n^2$ , also  $\beta^2 = 1$ , somit  $q = \mp a_n$ . Wenn nun  $q = -a_n$  ist, so hat man nur statt der letzten Kreifeländerung die entgegengesetzte zu nehmen, so ist dann auch  $q = a_n$ , mithin ist dann der eine der gegebenen Normvereine in den andern durch Kreifeländerung übergegangen.

**212. Satz.** In jedem Gebiete  $m$ ter Stufe kann man einen Normverein gleicher Stufe von beliebigem Zahlwerte aufstellen und zwar so, dass dieser Verein Teil eines vollständigen Normvereins ist.

**Beweis.** Das Gebiet der ursprünglichen Einheiten  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sei das Hauptgebiet. Der Verein dieser Einheiten ist nach 203 ein vollständiger Normverein vom Zahlwerte 1. In dem Gebiete  $m$ ter Stufe  $A$  innerhalb des Hauptgebietes sei nun  $a_1$  eine Größe erster Klasse vom Zahlwerte 1. Nach 210 kann nun jener vollständige Normverein durch Kreifeländerung so umgewandelt werden, dass  $a_1$  eine der Größen des hervorgehenden Normvereins wird. Dann ist  $a_1$  zu den  $n - 1$  übrigen Größen dieses Normvereins, also nach 208 auch zu jeder Größe ihres Gebietes  $A_1$  normig. Dies Gebiet ist von  $(n - 1)$ ter Stufe und hat also mit dem Gebiete  $m$ ter Stufe  $A$  nach 31 ein Gebiet gemein, dessen Stufenzahl  $n - 1 + m - n = m - 1$  ist. Es sei in diesem gemeinschaftlichen Gebiete wieder  $a_2$  eine Größe



erster Klasse vom Zahlwerte 1. Da  $a_2$  also auch dem Gebiete  $A_1$  angehört, so ist sie nach dem obigen zu  $a_1$  normig, aber auch, da beide gleich 1 sind, mit  $a_1$  im Zahlwerte gleich, also bilden  $a_1$  und  $a_2$  einen Normverein vom Zahlwerte 1. Also lässt sich nach 209 der vollständige Normverein  $e_1, \dots, e_n$  in einen andern Normverein umwandeln, welcher  $a_1$  und  $a_2$  enthält. Das Gebiet  $A_2$  der übrigen  $n - 2$  Größen dieses Normvereins ist von  $(n - 2)$ ter Stufe, und alle Größen erster Klasse, die diesem Gebiete angehören, sind normig zu  $a_1$  und  $a_2$ . Nun haben  $A$  und  $A_2$  ein Gebiet  $m - 2$ ter Stufe gemein; in ihm sei  $a_3$  eine beliebige GröÙe erster Klasse vom Zahlwerte 1, so hat man schon einen Normverein von drei Größen  $a_1, a_2, a_3$  in  $A$ , und so kann man fortfahren. Hat man so in  $A$  einen Normverein von  $(m - 1)$  Größen  $a_1, \dots, a_{m-1}$  erhalten, so enthält der vollständige Normverein, zu dem er gehört, ausserdem noch  $n - m + 1$  Größen, d. h. ihr Gebiet, welches  $A_{m-1}$  heisse, ist von  $(n - m + 1)$ ter Stufe, hat also mit dem Gebiete  $m$ ter Stufe  $A$  noch ein Gebiet gemein, dessen Stufenzahl  $n - m + 1 + m - n = 1$  ist. Es sei  $a_m$  eine GröÙe erster Klasse dieses Gebietes vom Zahlwerte 1, so ist  $a_m$ , da es in  $A_{m-1}$  liegt, zu  $a_1, \dots, a_{m-1}$  normig und  $a_1, \dots, a_m$  bilden also einen Normverein  $m$ ter Stufe in dem Gebiete  $m$ ter Stufe  $A$ . Diesem Normvereine kann man dadurch, dass man alle seine Größen mit einer und derselben beliebigen Zahl vervielfacht, jeden beliebigen Zahlwert geben.

### 15. Die normige Zurückleitung.

**Erklärung.** Die normige Zurückleitung  $A'$  einer GröÙe  $A$  213. auf ein Gebiet  $B$  heist die Zurückleitung der GröÙe  $A$  auf das Gebiet  $B$ , unter Ausschluss des zu  $B$  ergänzenden Gebietes (Vergl. 28 und 179).

In der Raumlehre ist die senkrechte Abschattung oder Projektion die normige Zurückleitung. Sei z. B.  $a, b, c$  ein vollständiger Normverein und  $p = \alpha a + \beta b + \gamma c$  eine beliebige GröÙe des Hauptgebietes, so ist die normige Zurückleitung der GröÙe  $p$  auf das Gebiet  $bc$  gleich  $\beta b + \gamma c$ , die auf das Gebiet  $c$  gleich  $\gamma c$ .

**Satz.** Die normige Zurückleitung  $A'$  einer GröÙe  $A$  auf ein 214. Gebiet  $B$  ist

$$A' = \frac{{}^n[B \cdot (A\bar{B})]}{B^2}, \text{ und sie ist } A' = {}^n[B \cdot (A\bar{B})], \text{ wenn } B^2 = 1.$$

**Beweis.** Nach 213 ist  $A'$  die Zurückleitung von  $A$  auf  $B$ , unter



Ausschluss des zu B ergänzenden Gebietes, d. h. des Gebietes  $\bar{B}$ . Wird  $\bar{B}$  mit C bezeichnet, so ist nach 181

$$A' = \frac{[B(AC)]}{[BC]}, \text{ also } = \frac{[B \cdot (A\bar{B})]}{[B\bar{B}]} = \frac{[B \cdot (A\bar{B})]}{B^2}.$$

215. **Satz.** Wenn die Klasse von A gleich der von B ist, so ist die Zurückleitung

$$A' = \frac{[A\bar{B}B]}{B^2}, \text{ und sie ist } A' = [A\bar{B}B], \text{ wenn } B^2 = 1.$$

Beweis. Wenn A und B gleicher Klasse sind, so ist nach 167  $[A\bar{B}]$  eine Zahl und kann also statt  $[B \cdot (A\bar{B})]$  geschrieben werden  $[A\bar{B}B]$ .

216. **Satz.** Die Ergänzung des Enflaches A von m Größen eines vollständigen Normvereins vom Zahlwerte eins ist, wenn die n einfachen Fache (Faktoren) von  $[AB]$  die n Größen des Normvereins sind, dem Enflache der  $(n - m)$  übrigen Größen des Vereins gleich oder entgegengesetzt, je nachdem  $[AB] = +1$  oder  $= -1$  ist, d. h. es ist

$$\bar{A} = [ABB].$$

Beweis. 1. Für den Verein der ursprünglichen Einheiten ist diese Formel in 138 als Erklärung festgesetzt.

2. Es ist nun noch zu beweisen, dass, wenn diese Formel für irgend einen Normverein  $a, b, c, \dots$  gilt, so dass  $\bar{A} = [ABB]$ , sie auch für jeden aus ihm durch Kreiseländerung hervorgehenden Normverein gilt. Es gehe nun durch Kreiseländerung  $a$  in  $a_1 = xa + yb$ ,  $b$  in  $b_1 = xb - ya$  über und verwandle sich A in  $A_1$ , B in  $B_1$ ; so ist zu zeigen, dass auch  $\bar{A}_1 = [A_1B_1B_1]$  sei. Da nun A und B nach dem Satze zusammen alle Größen  $a, b, \dots$  des Normvereins und zwar sowohl A als B jede dieser Größen nur einmal enthalten sollen, so kommen a und b entweder beide in A, oder beide in B, oder eine in A und die andere in B vor. Wir haben nun schon in 206 bewiesen, dass das Enflach  $[a_1b_1]$  bei dieser Aenderung gleich  $[ab]$  bleibt; somit bleibt in den beiden ersten Fällen sowohl A als B unverändert, also bleibt dann auch die obige Gleichung, die nur A und B enthält, bestehen.

Im dritten Falle sei a in A enthalten, b in B, und sei A' die Gröse, die aus A hervorgeht, wenn man darin b statt a setzt, und B' die Gröse, welche aus B hervorgeht, wenn man darin a statt b setzt.



Dann unterscheiden sich die Fläche  ${}^n[A'B']$  und  ${}^n[AB]$  nur durch gegenseitige Vertauschung der beiden einfachen Fache  $a$  und  $b$ , folglich ist dann nach 88  ${}^n[A'B'] = -{}^n[AB]$ . Ferner ist dann

$$A_1 = xA + yA', \quad B_1 = xB - yB',$$

folglich nach 151

$$\bar{A}_1 = x\bar{A} + y\bar{A}'$$

Da nun  $A$  und  $A'$  nur Größen des Normvereins  $a, b, \dots$  als einfache Fache oder Faktoren enthalten, und  $B$  und  $B'$  die jedesmal übrigen, so gilt (nach der Annahme) für sie die obige Gleichung, d. h. es ist

$$\bar{A} = {}^n[ABB], \quad \bar{A}' = {}^n[A'B'B'],$$

und da  ${}^n[A'B'] = -{}^n[AB]$ , auch  $\bar{A}' = -{}^n[ABB']$ , mithin

$$\bar{A}_1 = x{}^n[ABB] - y{}^n[ABB'] = {}^n[AB(xB - yB')] = {}^n[ABB_1].$$

Endlich ist nach 206  ${}^n[A_1B_1] = {}^n[AB]$ , indem die einfachen Fache von  ${}^n[A_1B_1]$  aus denen von  ${}^n[AB]$  durch positive Kreiseländerung hervorgehen. Also ist

$$\bar{A}_1 = {}^n[A_1B_1B_1],$$

d. h. wenn die Gleichung für irgend einen Normverein gilt, so gilt sie auch für jeden daraus durch positive Kreiseländerung hervorgehenden, und ebenso auch für jeden daraus durch negative Aenderung hervorgehenden. Denn nach 204 wird die positive Kreiseländerung in eine negative verwandelt, wenn man das Vorzeichen von  $b_1$  ändert, dann ändert sich auch das Vorzeichen von  $B_1$ , wobei die gefundene Gleichung bestehen bleibt. Also bleibt die Gleichung überhaupt bei jeder Kreiseländerung des Normvereins bestehen, wenn sie für irgend einen Normverein gilt. Nach Beweis 1 gilt sie aber für den Normverein der ursprünglichen Einheiten, also nun auch für jeden daraus durch Kreiseländerung abgeleiteten Verein. Nach 211 kann man aber jeden Normverein des Zahlwertes 1 aus jenem ableiten, also gilt die Gleichung für jeden Normverein vom Zahlwerte 1.

**Satz.** Alle bisher aufgestellten Sätze behalten ihre Geltung, 217. wenn man statt des Vereins der ursprünglichen Einheiten einen beliebigen vollständigen Normverein mit dem Zahlwerte Eins setzt.

**Beweis.** Alle in den ersten beiden Abschnitten entwickelten Rechnungsgefetze gelten nach 160 auch dann noch, wenn man statt der  $n$  ursprünglichen Einheiten beliebige  $n$  Größen setzt, welche Viel-



fachen summen derselben sind und deren Flach 1 ist, also auch, wenn man die Grösen eines vollständigen Normvereins einsetzt. Ferner gilt nach 216 der Begriff der Ergänzung wie er in 128 in Bezug auf den Verein der ursprünglichen Einheiten aufgestellt ist, auch in Bezug auf jeden Normverein mit dem Zahlwerte Eins. Aber auf diesem Begriff der Ergänzung und den in den ersten beiden Abschnitten entwickelten Rechnungsgeetzen beruhen alle Sätze der Innungslehre, wie sie bisher entwickelt worden sind. Also gelten diese Sätze noch, wenn man statt des Vereins der ursprünglichen Einheiten einen Normverein mit dem Zahlwerte eins setzt.

Der Begriff des Innenzeuges ist also nicht mehr an den Verein der ursprünglichen Einheiten geknüpft, man kann vielmehr statt jenes Vereins einen beliebigen Normverein vom Zahlwerte eins setzen, ohne dass irgend einer der bisher aufgestellten Sätze eine Aenderung erleidet. Es ist also der Begriff des Innenzeuges oder des inneren Produktes nur noch an den Begriff des Normvereins geknüpft, und dieser tritt daher in den später folgenden Entwicklungen statt des Vereins der ursprünglichen Einheiten hervor.

218. **Satz.** Die Bedingungsgleichungen für die innere Webung zweier Grösen erster Klasse sind

$$[e_r \bar{e}_s] = 0, \text{ wenn } r > s, \text{ und } [e_r \bar{e}_r] = [e_s \bar{e}_s] = \dots = 1,$$

und zwar gelten dieselben auch, wenn man statt der Einheiten  $e_1, e_2, \dots, e_n$  einen beliebigen vollständigen Normverein setzt.

Beweis. Die Geltung der beiden Gleichungsgruppen für die Einheiten ist in 187 bewiesen. Also gelten sie nach 217 auch für jeden einfachen vollständigen Normverein von dem Zahlwerte eins. Sie gelten aber auch für jeden beliebigen vollständigen Normverein vom Zahlwerte  $\lambda$ . Denn sind  $a, b$ , zwei Grösen desselben und ist  $\lambda$  der Zahlwert des Normvereins, so dass  $a = \lambda a'$ ,  $b = \lambda b'$  gesetzt werden kann, wo  $a'$  und  $b'$  den Zahlwert 1 haben, so ist  $[a' \bar{b}'] = 0$ , also auch  $[\lambda a' \bar{\lambda b}'] = 0$ , d. h.  $[a \bar{b}] = 0$  und  $[a' \bar{a}] = 1$ , also  $[a \bar{a}] = [\lambda a' \bar{\lambda a}'] = \lambda^2 [a' \bar{a}'] = \lambda^2$ . Ebenso  $[b \bar{b}] = \lambda^2$ , also  $[a \bar{a}] = [b \bar{b}]$ . Die beiden obigen Gruppen von Gleichungen enthalten aber auch die vollständigen Bestimmungsgleichungen, d. h. es herrscht zwischen den Zeugen oder Produkten  $[e_r \bar{e}_s]$  keine andere Zahlbeziehung, als eine aus jenen beiden Gruppen ableitbare. Es lassen sich nämlich vermöge der beiden Gruppen alle Zeuge oder Produkte  $[e_r \bar{e}_s]$ , sofern  $r$  gleich  $s$  ist, gleich  $[e_1 \bar{e}_1]$  setzen, während sie verschwinden, sobald  $r$  von  $s$  verschieden ist. Hat man also irgend eine Bedingungsgleichung



$$S\alpha_{r,s}[\overset{n}{e_r}\bar{e_s}] = 0,$$

so verwandelt sie sich in

$$S\alpha_{r,r}[\overset{n}{e_1}\bar{e_1}] = 0,$$

also, da  $[\overset{n}{e_1}\bar{e_1}]$  gleich 1 ist, in

$$S\alpha_{r,r} = 0.$$

Ist aber letzteres der Fall, so geht die Gleichung

$$S\alpha_{r,s}[\overset{n}{e_r}\bar{e_s}] = 0$$

schon aus den obigen beiden Gruppen hervor, somit enthalten jene beiden Gruppen die vollständigen Bestimmungsgleichungen.

Für die innere Webung oder Multiplikation zweier beliebiger Größen von den Stufen  $p$  und  $q$  ( $q \geq p$ ) sind die Bestimmungsgleichungen in den beiden Gleichungsgruppen enthalten:

$[\overset{n}{E}\bar{F}] = 0$ , wenn  $E$  und  $F$  eine der andern nicht gleich oder untergeordnet

$[\overset{n}{E}\bar{E}G] = [\overset{n}{E'}\bar{E'}G]$ , wo  $E, F, G, E'$  Fläche der ursprünglichen Einheiten sind,  $E, E'$  von  $p$ ter,  $F, [\overset{n}{E}G]$  und  $[\overset{n}{E'}G]$  von  $q$ ter Klasse ungleich null sind.

$$\text{Satz.} \quad [\overset{n}{a}\bar{b}] = [\overset{n}{b}\bar{a}]. \quad 219.$$

Beweis. Unmittelbar aus 197.

$$\text{Satz.} \quad [\overset{n}{(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots)}(\bar{\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots})] = \alpha_1 \beta_1 a_1^2 + \alpha_2 \beta_2 a_2^2 + \dots, \quad 220.$$

wenn  $a_1, a_2, \dots$  zu einander normig sind.

$$\begin{aligned} \text{Beweis.} \quad & \text{Es ist } [\overset{n}{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots}(\bar{\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots})] \\ &= [\overset{n}{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots}(\bar{\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots})] = [\overset{n}{(S\alpha_a a_a)(S\beta_b \bar{a}_b)}] \\ &= S\alpha_a \beta_b [\overset{n}{a_a \bar{a}_b}] \\ &= S\alpha_a \beta_a [\overset{n}{a_a \bar{a}_a}], \end{aligned} \quad (74)$$

weil  $a_a$  und  $a_b$ , wenn  $a$  von  $b$  verschieden ist, nach der Annahme zu einander normig sind, also nach 218 ihr Innenzeug null ist. Der letzte Ausdruck ist aber

$$= S\alpha_a \beta_a a_a^2 = \alpha_1 \beta_1 a_1^2 + \alpha_2 \beta_2 a_2^2 + \dots$$

$$\text{Satz.} \quad [\overset{n}{(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots)}(\bar{\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots})] = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots, \quad 221.$$

wenn  $a_1, a_2, \dots$  ein einfacher Normverein.

Beweis. Nach 220 ist

$$\begin{aligned} & [\overset{n}{(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots)}(\bar{\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots})] \\ &= \alpha_1 \beta_1 a_1^2 + \alpha_2 \beta_2 a_2^2 + \dots \end{aligned}$$



Da aber  $a_1, a_2, \dots$  ein einfacher Normverein sind, so ist  $a_1^2 = a_2^2 = \dots = 1$ , also der gefundene Ausdruck

$$= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots$$

222. **Satz.** Wenn  $a_1, a_2, \dots$  zu einander normig sind, so ist

$$(a_1 + a_2 + \dots)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots$$

Beweis. Unmittelbar aus 220.

223. **Satz.**  $(a + b)^2 = a^2 + 2[a\bar{b}] + b^2$ .

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= [{}^n(a + b)(\bar{a} + \bar{b})] \\ &= [{}^n a \bar{a}] + [{}^n a \bar{b}] + [{}^n b \bar{a}] + [{}^n b \bar{b}] \end{aligned} \quad (74),$$

also nach 218

$$= a^2 + 2[a\bar{b}] + b^2.$$

224. **Satz.**  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2[b\bar{c}] + 2[c\bar{a}] + 2[a\bar{b}]$ .

Beweis wie in 223.

Die Sätze 222 bis 224 enthalten, auf den Raum bezogen, den Pythagoräischen Lehrsatz nebst seiner Erweiterung für die Ebene wie für den Raum.

225. **Satz.** Wenn die Gebiete von  $A$  und  $B$  zu einander allseitig normig sind, und  $C$  eine beliebige Gröse von niederer oder gleicher Klasse wie  $B$  ist, so ist

$$\begin{aligned} [{}^n AB(\bar{AC})] &= A^2 [{}^n B\bar{C}] \text{ und} \\ [{}^n CA(\bar{BA})] &= A^2 [{}^n C\bar{B}]. \end{aligned}$$

Beweis. 1. Es sei ein Normverein mit dem Zahlwerte 1 angenommen, dessen Grösen sich auf die Gebiete  $A$  und  $B$  verteilen, und sei derselbe zu einem vollständigen Normvereine ergänzt. Dann ist  $C$  als Vielfachensumme der Geschiedsfläche (multiplikativen Kombinationen) der Grösen jenes Normvereins ableitbar. (106. 109).

Es sei  $C = \gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \dots$ , ferner sei  $A = \alpha A_1$ ,  $B = \beta B_1$ , wo  $A_1, B_1$  Geschiedsfläche (kombinatorische Produkte) der Grösen des Normvereins sind, so ist

$$\begin{aligned} [{}^n AB(\bar{AC})] &= \alpha^2 \beta [{}^n A_1 B_1 (\bar{A}_1 (\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \dots))] \\ &= \alpha^2 \beta \gamma_1 [{}^n A_1 B_1 (\bar{A}_1 C_1)] + \alpha^2 \beta \gamma_2 [{}^n A_1 B_1 (\bar{A}_1 C_2)] + \dots \end{aligned}$$

Aber  $[{}^n A_1 B_1 (\bar{A}_1 C_r)]$  ist, wenn  $A_1, B_1, C_r$  Einheiten höherer Klasse, d. h. Geschiedsfläche der ursprünglichen Einheiten sind, nach 190 gleich  $[{}^n B_1 \bar{C}_r]$ . Dasselbe findet aber nach 217 auch noch statt, wenn



jene Größen Geschiedsfläche der Größen eines einfachen Normvereins sind, also auch in diesem Falle. Somit wird

$$\begin{aligned} {}^n[AB\overline{AC}] &= \alpha^2\beta\gamma_1 {}^n[B_1\overline{C}_1] + \alpha^2\beta\gamma_2 {}^n[B_1\overline{C}_2] + \dots \\ &= \alpha^2\beta {}^n[B_1(\gamma_1 C_1 + \gamma_2 C_2 + \dots)] \\ &= \alpha^2\beta {}^n[B_1\overline{C}]. \end{aligned}$$

Da nun  $A_1$  ein Geschiedsfläch von Größen eines einfachen Normvereins ist, so ist  $A_1^2 = 1$  und ist der gefundene Ausdruck

$$\begin{aligned} &= \alpha^2\beta A_1^2 {}^n[B_1\overline{C}] = (\alpha A_1)^2 {}^n[\beta B_1\overline{C}] \\ &= A^2 {}^n[B\overline{C}]. \end{aligned}$$

2. Auf gleiche Weise ergibt sich die zweite Formel des Satzes.

**Satz.** Das Innenzeug oder innere Produkt zweier Größen ändert seinen Wert nicht, wenn man statt der einen Größe ihre normige Zurückleitung auf das Gebiet der andern setzt, d. h.

$$\begin{aligned} {}^n[A\overline{B}] &= {}^n[A\overline{B'}] \text{ und} \\ {}^n[B\overline{A}] &= {}^n[B'\overline{A}], \end{aligned}$$

wenn  $B'$  die normige Zurückleitung von  $B$  auf das Gebiet  $A$  ist und also  $A$  von gleicher oder höherer Klasse als  $B$  ist.

Beweis. Es sei das Hauptgebiet von  $n$ ter Stufe,  $A$  von  $m$ ter,  $B$  von  $p$ ter Klasse, so kann man nach 212 einen vollständigen Normverein  $a_1, \dots, a_n$  so annehmen, dass  $m$  seiner Größen, etwa  $a_1, \dots, a_m$ , in  $A$  liegen, und sein Zahlwert 1 sei. Die  $p$  Fache oder Faktoren von  $B$  sind dann nach 207 als Vielfachensummen von  $a_1, \dots, a_n$  darstellbar, also ist  $B$  eine Vielfachensumme der Geschiedsfläche (multiplikativen Kombinationen) von  $a_1, \dots, a_n$  zur  $p$ ten Klasse. Diese Geschiedsfläche seien  $B_1, B_2, \dots, B_q, B_{q+1}, \dots, B_r$ , wo  $B_1, \dots, B_q$  die Geschiedsfläche aus  $a_1, \dots, a_m$  seien; und sei

$$B = \beta_1 B_1 + \dots + \beta_q B_q + \beta_{q+1} B_{q+1} + \dots + \beta_r B_r,$$

so sind nach 188 und 217 die Zeuge  ${}^n[A\overline{B}_{q+1}], \dots, {}^n[A\overline{B}_r]$  alle gleich null, da jede der Größen  $B_{q+1}$  bis  $B_r$  solche Fache oder Faktoren enthält, die in  $A$  nicht vorkommen, und diese Größen also der Größe  $A$  nicht gleich oder untergeordnet sind, also wird

$$\begin{aligned} {}^n[A\overline{B}] &= \beta_1 {}^n[A\overline{B}_1] + \dots + \beta_q {}^n[A\overline{B}_q] \\ &= {}^n[A(\beta_1 B_1 + \dots + \beta_q B_q)]. \end{aligned}$$

Aber nach 179 ist  $\beta_1 B_1 + \dots + \beta_q B_q$  die Zurückleitung von  $B$  auf das Gebiet  $a_1, \dots, a_m$ , mit Ausschluss des Gebietes  $a_{m+1}, \dots, a_n$ ,



letzteres Gebiet ist aber nach 216 die Ergänzung des ersteren; also ist  $\beta_1 B_1 + \dots + \beta_q B_q$  die normige Zurückleitung von  $B$  auf das Gebiet  $a_1, \dots, a_m$ , d. h. auf das Gebiet von  $A$ , also gleich  $B'$  und somit

$${}^n[\overline{AB}] = {}^n[\overline{AB'}].$$

Aus gleichem Grunde ist  ${}^n[\overline{BA}] = {}^n[\overline{B'A}]$ .

227. **Satz.** Wenn man in einem Innenzeuge oder innern Produkte zweier Größen gleicher Klasse die eine auf das Gebiet der andern normig zurückleitet, und diese Zurückleitung so wie die Gröse, auf deren Gebiet zurückgeleitet ist, durch ein und daselbe Mas misst, dessen Zahlwert Eins ist, so ist das Zeug der beiden Messungs-Brüche gleich dem gegebenen Innenzeuge oder innern Produkte, d. h. es ist

$${}^n[\overline{AB}] = \alpha\beta', \text{ wenn } A = \alpha E,$$

und die normige Zurückleitung  $B'$  von  $A$  auf  $B$  gleich  $\beta'E$ , wo der Zahlwert von  $E$  gleich Eins ist.

Beweis. Nach 198 ist

$${}^n[\overline{AB}] = {}^n[\overline{AB'}].$$

Es sei  $E$  ein Gebietsteil von  $A$  mit dem Zahlwerte Eins, und sei  $A = \alpha E$ ,  $B' = \beta'E$ , so ist  ${}^n[\overline{AB'}] = \alpha\beta'{}^n[\overline{EE}] = \alpha\beta'E^2 = \alpha\beta'$ , da  $E^2 = 1$  ist.

228. **Erklärung.** Wenn  $A$  ein Geschiedsflach (eine multiplikative Komplexion) aus  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ist, so heist das Geschiedsflach  $B$ , welches die sämtlichen in  $A$  nicht enthaltenen gegebenen Größen erster Stufe enthält, und mit einem solchen Vorzeichen ( $\pm$ ) versehen ist, dass  ${}^n[\overline{AB}] = {}^n[a_1 a_2 \dots a_n]$  ist, das zu  $A$  ergänzende Geschiedsflach.

229. **Satz.** Wenn  $A$  (Alpha) mit  $A$  von gleicher Klasse,  $B$  (Bêta) aber von gleicher oder niederer Klasse ist als  $B$ , und  ${}^n[\overline{AB}] \geq 0$  ein Enflach von Größen erster Klasse ist, auch  $A, A_1, \dots$  die Geschiedsfläche (multiplikativen Komplexionen) aus den Größen erster Klasse von  ${}^n[\overline{AB}]$ , und  $B, B_1, \dots$  die zu  $A, A_1, \dots$  ergänzenden Geschiedsfläche sind, so ist

$$(a) \quad {}^n[\overline{AB}(\overline{AB})] = {}^n[\overline{A\overline{A}(B\overline{B})}] + {}^n[\overline{A_1\overline{A}(B_1\overline{B})}] + \dots \text{ und}$$

$$(b) \quad {}^n[\overline{BA}(\overline{BA})] = {}^n[\overline{B\overline{B}(A\overline{A})}] + {}^n[\overline{B\overline{B}_1(A\overline{A}_1)}] + \dots$$

Beweis. 1. Es seien zunächst die Größen erster Klasse in  ${}^n[\overline{AB}]$  alle zu einander normig. Da  $A$  von gleicher Klasse mit  $A$  ist,



so ist es als eine Vielfachenfumme aus den Geschiedsflächen  $A, A_1, \dots$  darstellbar. Es sei also

$$A = \alpha A + \alpha_1 A_1 + \dots,$$

so ist

$$\begin{aligned} {}^n[AB(\overline{AB})] &= {}^n[AB(\overline{(\alpha A + \alpha_1 A_1 + \dots)B})] \\ &= \alpha {}^n[AB(\overline{AB})] + \alpha_1 {}^n[AB(\overline{A_1 B})] + \dots \end{aligned}$$

Da nun nach der Voraussetzung  $B, B_1, \dots$  die ergänzenden Geschiedsfläche zu  $A, A_1, \dots$  sind, so ist nach 228  ${}^n[AB] = {}^n[A_1 B_1] = \dots$ , und erhalten wir die Gleichung

$${}^n[AB(\overline{AB})] = \alpha {}^n[AB(\overline{AB})] + \alpha_1 {}^n[A_1 B_1(\overline{A_1 B})] + \dots$$

Da ferner die einfachen Größen in  ${}^n[AB]$  alle zu einander normig, auch dieselben sind mit denen von  $\mp {}^n[A_1 B_1]$  u. f. w. nach der Annahme, so ist  $A$  zu  $B$  allseitig normig, und ebenso  $A_1$  zu  $B_1$  u. f. w. Folglich ist nach 225 der zuletzt gewonnene Ausdruck

$$= \alpha A^2 {}^n[B\overline{B}] + \alpha_1 A_1^2 {}^n[B_1 \overline{B}] + \dots$$

Nun ist aber  ${}^n[A_r \overline{A}] = {}^n[A_r(\overline{\alpha A + \alpha_1 A_1 + \dots})] = \alpha_r A_r^2$ , weil  $A_r$  mit den zu ihm normigen Größen  $A, A_1, \dots$  ausgenommen  $A_r$ , innerlich gewebt oder multipliziert, null giebt nach 188, 217. Also kann man in dem vorher gefundenen Ausdruck  ${}^n[A_r \overline{A}]$  statt  $\alpha_r A_r^2$  setzen und jener Ausdruck wird

$$= {}^n[A\overline{A}] {}^n[B\overline{B}] + {}^n[A_1 \overline{A}] {}^n[B_1 \overline{B}] + \dots = {}^n[A\overline{A}(B\overline{B})] + {}^n[A_1 \overline{A}(B_1 \overline{B})] + \dots,$$

d. h. die Formel (a) gilt für unsere Voraussetzung.

2. Die Formel (a) gilt also, wenn die Größen erster Klasse in  ${}^n[AB]$  alle zu einander normig sind, sie bleibt aber auch noch bestehen, wenn man diese Reihe von Fachen oder Faktoren nach 110 linig ändert, d. h. statt irgend eines Faches  $a$  setzt  $a + \beta b$ , wo  $\beta$  eine Zahl und  $b$  einer der andern Fache ist. Hierbei behält nach 111 das Zeug oder Produkt  ${}^n[AB]$ , also auch die linke Seite unserer Formel, denselben Wert. Betrachtet man nun irgend ein Glied der rechten Seite, z. B.  ${}^n[A_r \overline{A}(B_r \overline{B})]$ , so können  $a$  und  $b$  entweder beide in  $A_r$  vorkommen, oder beide in  $B_r$ , oder eins in  $A_r$ , das andere in  $B_r$ . In den beiden ersten Fällen bleibt sowohl der Wert von  $A_r$  als der von  $B_r$  unverändert, also auch das betreffende Glied. Im letzten Falle kommt dafür noch ein anderes Glied  ${}^n[A_s \overline{A}(B_s \overline{B})]$  vor von der Art,



dass, wo das eine der Zeuge oder Produkte  $A_r$  und  $A_s$  den Fach  $a$  enthält, das andere den Fach  $b$  enthält, und dass die Zeuge  $B_r$  und  $B_s$ , da sie die jedesmal dem  $A_r$  und  $A_s$  fehlenden Fache enthalten, in derselben gegenseitigen Beziehung zu einander stehen, alle die Zeuge im Uebrigen aber dieselben Fache enthalten. Es kommt also  $a$  in einer der Grösen  $A_r$  und  $A_s$  vor; es mag  $a$  in  $A_r$  vorkommen. Nun sei  $A'$  die Gröse, welche aus  $A_r$  hervorgeht, indem man darin  $b$  statt  $a$  setzt, und  $B'$  die Gröse, welche aus  $B_r$  hervorgeht, indem man darin  $a$  statt  $b$  setzt. Dann enthält also  $A'$  dieselben Fache wie  $A_s$  und  $B'$  wie  $B_s$ ; es sind also nach 91 dann  $A'$  und  $B'$  den Grösen  $A_s$  und  $B_s$  entweder gleich oder entgegengesetzt. Da  ${}^n[A'B']$  aus  ${}^n[A_r B_r]$  durch Vertauschung der beiden einfachen Fache  $a$  und  $b$  hervorgeht, so ist nach 88  ${}^n[A'B'] = -{}^n[A_r B_r] = -{}^n[A_s B_s]$ , da  ${}^n[A_s B_s] = {}^n[A_r B_r]$  nach der Annahme ist. Wenn also  $A' = \mp A_s$  ist, so ist  $B' = \pm B_s$ . Wenn man nun die linige Aenderung von  $a$  in  $a + \beta b$  einführt, so verwandelt sich, da  $B_r$  und  $A'$  kein  $a$  enthalten und also unverändert bleiben, während  $A_r$  in  $A_r + \beta A'$  und  $B'$  in  $B' + \beta B_r$  sich verwandelt, auch  ${}^n[A_r \bar{A}(B_r \bar{B})] + {}^n[A_s \bar{A}(B_s \bar{B})] = {}^n[A_r \bar{A}(B_r \bar{B})] - {}^n[A' \bar{A}(B' \bar{B})]$  in  ${}^n[(A_r + \beta A') \bar{A}(B_r \bar{B})] - {}^n[A' \bar{A}((B' + \beta B_r) \bar{B})] = {}^n[A_r \bar{A}(B_r \bar{B})] - {}^n[A' \bar{A}(B' \bar{B})] + \beta {}^n[A' \bar{A}(B_r \bar{B})] - \beta {}^n[A' \bar{A}(B_r \bar{B})] = {}^n[A_r \bar{A}(B_r \bar{B})] - {}^n[A' \bar{A}(B' \bar{B})]$ , d. h. der Wert jener Summe bleibt ungeändert. Es bleibt somit die ganze rechte Seite unserer Formel bei jener linigen Aenderung ungeändert, indem die Glieder entweder einzeln ungeändert bleiben oder, wenn sie geändert werden, sich zu Gliederpaaren gestalten, deren Summe ungeändert bleibt. Da somit beide Seiten der Formel bei liniger Aenderung ungeändert bleiben, so bleibt die Formel, wenn sie für irgend eine Reihe von Fachen gilt, auch bei deren liniger Aenderung bestehen.

3. Die Reihe von Fachen  $a, b, \dots$  sei endlich eine ganz beliebige, nur sei ihr Enflach  ${}^n[AB] \geq 0$ , so lässt sich nach 212 stets eine Reihe zu einander normiger Grösen erster Stufe  $a_1, a_2, \dots$  angeben, von der Art, dass  ${}^n[ab \dots] = {}^n[a_1 a_2 \dots]$ . Dann lässt sich aber nach 113 die Grösenreihe  $a, b, \dots$  aus  $a_1, a_2, \dots$  durch linige Aenderung ableiten. Nun gilt nach Beweis 1 unsere Formel für die Reihe der zu einander normigen Fache  $a_1, a_2, \dots$ , also nach Beweis 2 auch für die durch fortgesetzte linige Aenderung daraus hervorgehende Reihe von Fachen, also auch für  $a, b, \dots$ , d. h. allgemein.



**Erklärung.** Die Summe  $S^n[A_\alpha \bar{A}(B_\beta \bar{B}) \cdots (L_l \bar{L})(M_m \bar{M})]$  230.  
bezeichnet die Summe, welche man erhält, wenn man aus den Grösen erster Klasse des Zeuges  $[AB \cdots M]$  die Geschiedsfläche zur fovielten Klasse entwickelt, als die Klasse von A beträgt, und jedes folches Geschiedsflach als eine der Grösen  $A_\alpha$  fetzt, wenn man demnächst zu jedem diefer Geschiedsfläche, aus den in ihm nicht vorkommenden Grösen erster Klasse des Zeuges  $[AB \cdots M]$  die Geschiedsfläche zur fovielten Klasse entwickelt, als die Klasse von B beträgt und jedes folches Geschiedsflach als eine der Grösen  $B_\beta$  fetzt und fo fortfährt bis zu  $M_m$ , endlich das Vorzeichen fo bestimmt, dass  $[A_\alpha B_\beta \cdots M_m] = [AB \cdots M]$  ist.

Als Beispiel möge gelten  $[ABC] = [(ab)(cd)e]$ . Hier ist jene Summe die Summe von:

|             |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| ab, cd, e   | ad, bc, e   | bc, ad, e   | be, ac, d   | ce, ab, — d |
| ab, ce, — d | ad, be, — c | bc, ae, — d | be, ad, — c | ce, ad, b   |
| ab, de, c   | ad, ce, b   | bc, de, a   | be, cd, a   | ce, bd, — a |
| ac, bd, — e | ae, bc, — d | bd, ac, — e | cd, ab, e   | de, ab, c   |
| ac, be, d   | ae, bd, c   | bd, ae, c   | cd, ac, — b | de, ac, — b |
| ac, de, — b | ae, cd, — b | bd, ce, — a | cd, be, a   | de, bc, a.  |

**Satz.** Wenn  $A$  und  $A$  von gleicher Klasse find, ebenso  $B$  und  $B$ ,  $\Gamma$  und  $C$  u. f. w.,  $M$  aber von gleicher oder niederer Klasse ist wie  $M$  und  $[AB \cdots LM] \geq 0$  ein Enflach von Grösen erster Klasse ist, auch  $[A_\alpha B_\beta \cdots L_l M_m]$  dieselben Grösen erster Klasse als Fache oder Faktoren enthält wie  $[AB \cdots LM]$ , nur in anderer Folge, und zwar in der Art, dass beide Zeuge einander gleich find, auch ferner  $A_\alpha$  eben fo viel Grösen erster Klasse als Fache oder Faktoren enthält wie  $A$ ,  $B_\beta$  wie  $B$  u. f. w., fo ist

$$[AB \cdots LM \bar{A}B \cdots \bar{A}M] = S^n[A_\alpha \bar{A}(B_\beta \bar{B}) \cdots (L_l \bar{L})(M_m \bar{M})].$$

**Beweis.** Für zwei Fache oder Faktoren ist der Satz bereits in 229 bewiesen, denn es ist nach 229

$$\begin{aligned} [AB \bar{A}B] &= [A \bar{A}(B \bar{B})] + [A_l \bar{A}(B_l \bar{B})] + \cdots \\ &= S^n[A_\alpha \bar{A}(B_\beta \bar{B})]. \end{aligned}$$

Wendet man diesen Satz wiederholt an, fo kommt man zu dem Satze für beliebig viele Fache oder Faktoren. Zunächst nämlich kann man das Zeug oder Produkt  $[AB \cdots LM]$  als aus den zwei Fachen oder Faktoren  $A$  und  $[BC \cdots LM]$  bestehend anfehen. Dann wird



$$\begin{aligned} {}^n[AB \dots LM \overline{AB \dots AM}] &= {}^n[A(BC \dots LM) \overline{A(B\Gamma \dots AM)}] \\ &= S[{}^n A_a \overline{A} (BC \dots LM)_b \overline{(B\Gamma \dots AM)}]. \end{aligned}$$

Der gefundene Ausdruck ist aus demselben Grunde wieder

$$= S[{}^n A_a \overline{A} (B_b \overline{B})(CD \dots LM)_c \overline{(\Gamma A \dots AM)}],$$

und setzt man dies fort, so erhält man zuletzt

$$= S[{}^n A_a \overline{A} (B_b \overline{B}) \dots (L_l \overline{A})(M_m \overline{M})].$$

232. Satz. Wenn in dem Innenzeuge oder innern Produkte

${}^n[AB \dots \overline{AB \dots}]$  die Größen  $A$  und  $A$  von gleicher Klasse sind, ebenso  $B$  und  $B$  und so fort, so ist

$${}^n[AB \dots \overline{AB \dots}] = \frac{{}^n[A'B' \dots]}{{}^n[AB \dots]},$$

wo  $A' = S[{}^n A_a \overline{A} A_a]$ ,  $B' = S[{}^n B_b \overline{B} B_b]$  u. f. w., und wo die  $A_a$  die Geschiedsfläche aus den einfachen Fachen oder Faktoren des Enflaches  ${}^n[AB \dots]$  zur so vielten Klasse sind, als die Klasse von  $A$  beträgt und entsprechend die  $B_b$  u. f. w.

Beweis. Nach 231 ist

$$\begin{aligned} {}^n[AB \dots \overline{AB \dots}] &= S[{}^n A_a \overline{A} (B_b \overline{B}) \dots], \text{ wo} \\ {}^n[A_a B_b \dots] &= {}^n[AB \dots] \text{ ist.} \end{aligned}$$

Da nun  $A$  mit  $A$  von gleicher Klasse ist, also auch  $A_a$  mit  $A$ , so ist nach 195  ${}^n[A_a \overline{A}]$  eine Zahl und aus gleichem Grunde  ${}^n[B_b \overline{B}]$ , u. f. w. Folglich ist

$$S[{}^n A_a \overline{A} (B_b \overline{B}) \dots] = S[{}^n A_a \overline{A} (B_b \overline{B}) \dots] [{}^n A_a B_b \dots] : [{}^n A_a B_b \dots].$$

Also, da  ${}^n[A_a B_b \dots]$  gleich  ${}^n[AB \dots]$  ist,

$$= S[{}^n A_a \overline{A} (B_b \overline{B}) \dots] [{}^n A_a B_b \dots] \cdot {}^n[AB \dots].$$

Oder, da nach 71 die Zahlfache beliebigen Fachen eines Zeuges zugeordnet werden können,

$$= S({}^n[A_a \overline{A}] A_a \dots {}^n[B_b \overline{B}] B_b \dots) : {}^n[AB \dots].$$

Hier enthält nach 231 in jedem Zeuge  ${}^n[A_a B_b \dots]$   $A_a$  andere Fache erster Klasse als  $B_b$ , u. f. w. Da nun aber die Zeuge, in denen  $A_a, B_b, \dots$  gleiche Fache erster Klasse enthalten, null sind, so können wir diese Zeuge zu dem obigen Ausdrucke hinzufügen, und erhalten dann nach 75 den Ausdruck



$$= \frac{[S^n[A_r \bar{A} A_r]) (S^n[B_r \bar{B} B_r]) \dots : [AB \dots]}{[AB \dots]},$$

$$\text{d. h.} = \frac{[A' B' \dots]}{[AB \dots]}.$$

**Satz.** Das Innenzeug oder innere Produkt zweier Größen mter 233. Klasse  $A = abc \dots$  und  $B = a'b'c' \dots$ , deren jede aus  $m$  einfachen Fachen besteht, ist gleich der Flachtausche oder Determinante ( $\Delta$ ) aus  $m$  Reihen von je  $m$  Gliedern, die man erhält, wenn man nach der Ordnung jeden einfachen Fach von  $A$  mit jedem von  $B$  zu einem Innenzeuge knüpft, d. h. es ist

$$[abc \dots (\bar{a}'b'c' \dots)] = \Delta \begin{cases} [a\bar{a}'], [a\bar{b}'], [a\bar{c}'], \dots \\ [b\bar{a}'], [b\bar{b}'], [b\bar{c}'], \dots \\ [c\bar{a}'], [c\bar{b}'], [c\bar{c}'], \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$= S \mp (\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots),$$

$$\text{wo } \alpha_1 = [a\bar{a}'], \alpha_2 = [a\bar{b}'], \alpha_3 = [a\bar{c}'], \dots$$

$$\beta_1 = [b\bar{a}'], \beta_2 = [b\bar{b}'], \beta_3 = [b\bar{c}'], \dots$$

$$\gamma_1 = [c\bar{a}'], \gamma_2 = [c\bar{b}'], \gamma_3 = [c\bar{c}'], \dots$$

u. f. w.

**Beweis.** Nach 232 ist

$$[abc \dots (\bar{a}'b'c' \dots)] = \frac{[a_1 b_1 c_1 \dots]}{[abc \dots]},$$

$$\text{wo } a_1 = [a\bar{a}'a] + [b\bar{a}'b] + [c\bar{a}'c] + \dots = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \dots$$

$$b_1 = [a\bar{b}'a] + [b\bar{b}'b] + [c\bar{b}'c] + \dots = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \dots$$

$$c_1 = [a\bar{c}'a] + [b\bar{c}'b] + [c\bar{c}'c] + \dots = \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c + \dots$$

.....

.....

ist. Aber nach 98 ist  $[a_1 b_1 c_1 \dots]$

$$= [(\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \dots)(\alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \dots)(\alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c + \dots) \dots]$$

$$= \Delta_a^{mn} [abc \dots] = S \mp (\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots) [abc \dots].$$

Also

$$[abc \dots (\bar{a}'b'c' \dots)] = \frac{[a_1 b_1 c_1 \dots]}{[abc \dots]} = \frac{S \mp (\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots) [abc \dots]}{[abc \dots]}$$

$$= S \mp (\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots).$$



$$234. \quad \text{Satz.} \quad {}^n[ab(a'b')] = {}^n[\overline{aa'}(\overline{bb'})] - {}^n[\overline{ab'}(a'\overline{b})].$$

$$235. \quad \text{Satz.} \quad {}^n[ab]^2 = a^2b^2 - {}^n[\overline{ab}]^2.$$

$$236. \quad \text{Satz.} \quad {}^n[abc]^2 = a^2b^2c^2 - a^2[{}^n\overline{bc}]^2 - b^2[{}^n\overline{ca}]^2 - c^2[{}^n\overline{ab}]^2 \\ + 2[{}^n\overline{ab}(\overline{bc})(\overline{ca})].$$

$$237. \quad \text{Satz.} \quad {}^n[abcd]^2 = 4 \left\{ \begin{array}{l} a^2, [{}^n\overline{ab}], [{}^n\overline{ac}], [{}^n\overline{ad}] \\ [{}^n\overline{ba}], b^2, [{}^n\overline{bc}], [{}^n\overline{bd}] \\ [{}^n\overline{ca}], [{}^n\overline{cb}], c^2, [{}^n\overline{cd}] \\ [{}^n\overline{da}], [{}^n\overline{db}], [{}^n\overline{dc}], d^2. \end{array} \right.$$

Die Sätze 234 bis 237 folgen unmittelbar aus 233, wenn man beachtet, dass nach 177  $a'\overline{b} = \overline{a'b}$  u. f. w.

$$238. \quad \text{Satz.} \quad {}^n[\overline{abc}] = {}^n[\overline{a\overline{c}b}] - {}^n[\overline{b\overline{c}a}].$$

$$239. \quad \text{Satz.} \quad {}^n[\overline{abcd}] = {}^n[\overline{a\overline{d}(bc)}] + {}^n[\overline{b\overline{d}(ca)}] + {}^n[\overline{c\overline{d}(ab)}].$$

$$240. \quad \text{Satz.} \quad {}^n[\overline{abcde}] = {}^n[\overline{a\overline{e}(bcd)}] + {}^n[\overline{b\overline{e}(cad)}] + {}^n[\overline{c\overline{e}(abd)}] + {}^n[\overline{d\overline{e}(cba)}].$$

Die Sätze 238 bis 240 folgen wieder unmittelbar aus 231 oder 233, wenn man in 238 c, in 239 d und in 240 e als zweiten Fach des innern Zeuges oder Produktes  ${}^n[\overline{AB}]$  betrachtet und diesem Fache noch 1 als zweiten Fach zufügt und demnächst beachtet, dass nach den Gesetzen der Flachung

$${}^n[ab] = -{}^n[ba], \quad {}^n[a(bc)] = {}^n[b(ca)] = {}^n[c(ab)] \quad \text{und} \\ {}^n[a(bcd)] = {}^n[b(cad)] = {}^n[c(abd)] = {}^n[d(cba)] \quad \text{ist.}$$

241. **Satz.** Wenn man aus einer Reihe von  $n$  Größen erster Klasse  $a_1, a_2, \dots, a_n$  die Geschiedsfläche (multiplikativen Komplexionen)  $A, A_1, \dots$  zu irgend einer Klasse (der  $m$ ten) bildet, und jedes derselben mit dem ergänzenden Geschiedsfläche  $B, B_1, \dots$  zu einem Innenzeuge oder innern Produkte knüpft, so ist die Summe dieser Zeuge null, d. h. es ist

$${}^n[\overline{AB}] + {}^n[\overline{A_1B_1}] + \dots = 0.$$

Beweis. 1. Es sei zuerst angenommen  $m \geq n - m$ . Der Fach  $A$  hat als Geschiedsfläche (multiplikative Komplexion) von  $a_1, \dots, a_n$  die Form

$$A = [{}^n a_r a_s \dots a_z],$$

wo  $r, s, \dots, z$  beliebige  $m$  verschiedene unter den Zahlen  $1 \dots n$  find. Der Fach  $B$  muss als ergänzendes Geschiedsfläche zu  $A$  diejenigen  $n - m$  unter den Größen  $a_1 \dots a_n$  als Fache enthalten, welche unter den Größen  $a_r, a_s, \dots, a_z$  nicht vorkommen. Es seien dies  $a_{r'}, a_{s'}, \dots, a_{u'}$ ,



so dass also  $B = (-1)^p [a_r a_s \dots a_u]$  ist. Ferner muss das durch  $(-1)^p$  angedeutete Vorzeichen nach 229 so bestimmt werden, dass  $[AB] = [a_1 \dots a_n]$  wird, d. h. dass

$$(-1)^p [a_r a_s \dots a_u a_v \dots a_z a_r a_s \dots a_u] = [a_1 a_2 \dots a_n] \text{ ist. Von (a)}$$

gleicher Form sind die sämtlichen übrigen Zeuge  $[A_1 \bar{B}_1]$  u. f. w. Sollen die Geschiedsfläche  $A, B, A_1, B_1, \dots$  wohlgeordnete sein, so hat man noch die Bedingungen hinzuzufügen, dass  $r < s < \dots < u < v < \dots < z$  und  $r' < s' < \dots < u'$  sei. Fügen wir diese Bedingung hinzu, so wird

$$[A\bar{B}] + [A_1 \bar{B}_1] + \dots = S(-1)^p [a_r a_s \dots a_u a_v \dots a_z (\bar{a}_r a_s \dots a_u)].$$

Fassen wir hier  $a_v \dots a_z$  zu einem Fache oder Faktor zusammen und fügen dem zweiten Fache des Innenzeuges an letzter Stelle noch den Fach 1 hinzu, so wird die Bedingung von 231 erfüllt, also wird der obige Ausdruck

$$[A\bar{B}] + [A_1 \bar{B}_1] + \dots = S(-1)^p [a_r \bar{a}_r (a_s \bar{a}_s) \dots (a_u \bar{a}_u) (a_v a_w \dots a_z)], \quad (b)$$

wobei noch die Gleichung (a) bestehen bleibt, und auch die Bedingungen  $r' < s' < \dots < u'$  und  $v < w < \dots < z$  geltend bleiben, hingegen die Bedingung, dass  $r < s < \dots < u$  sei, wegfällt, und die Summe sich auf alle unter jenen Bedingungen möglichen Glieder bezieht.

In dieser Summe sind nun alle Glieder paarweise einander entgegengesetzt und heben sich also. Sei nämlich

$$(-1)^p [a_r \bar{a}_r (a_s \bar{a}_s) \dots (a_u \bar{a}_u) (a_v a_w \dots a_z)]$$

eines dieser Glieder, wo die Zeiger bestimmte (von einander verschiedene) Werte haben, die den obigen Bedingungen genügen, und wo nach dem Obigen  $p$  einen solchen Wert hat, dass die Gleichung (a) erfüllt wird. Da die Zeiger  $r, r', s, s', \dots, u, u'$  alle von einander verschieden sind, so wird irgend einer der kleinste unter ihnen sein müssen, dies sei  $r$ , sein Flach  $[a_r \bar{a}_r]$ . Dies angenommen, vertausche man  $r$  und  $r'$  und ändere das Zeichen, so erhält man einen Ausdruck

$$(-1)^{p+1} [a_r \bar{a}_r (a_s \bar{a}_s) \dots (a_u \bar{a}_u) (a_v a_w \dots a_z)], \quad (c)$$

so soll gezeigt werden, dass auch dieser Ausdruck gleichfalls als Glied in der obigen Summe (b) vorkommt. Sollte der Zeiger  $r$  grösser sein als  $s'$ , so gebe man dem Fläche  $[a_r \bar{a}_r]$  unter den übrigen Flächen  $[a_s \bar{a}_s] \dots [a_u \bar{a}_u]$  eine solche Stellung, dass die Bedingung erfüllt wird, vermöge welcher der zweite Zeiger in jedem dieser Fläche kleiner sein



folle als der zweite Zeiger des nächst folgenden Flaches. Es werde diese Bedingung erfüllt, wenn man das Flach  $\overset{n}{[a_r \bar{a}_r]}$  um  $d$  Stellen nach rechts rückt, was gestattet ist, da alle diese Flache Zahlen sind. Es ist nun noch zu beweisen, dass auch die durch Gleichung (a) ausgedrückte Bedingung für das so hervorgehende Glied gilt, d. h. dass sie noch bestehen bleibt, wenn man in ihr  $p + 1$  statt  $p$  setzt, auf der linken Seite  $a_{r'}$  mit  $a_r$  vertauscht und diese beiden Flache um  $d$  Stellen nach rechts rückt. Das Zeug, welches auf diese Weise aus  $(-1)^p \overset{n}{[a_r a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'}]}$  hervorgeht, heisse  $D$ ; so ist

$$D = (-1)^{p+1} \overset{n}{[a_{r'} a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z a_r a_{s'} \cdots a_{u'}]}.$$

Denn man kann in diesem Flache  $D$  die Faktoren  $a_r$  und  $a_{r'}$  gleichzeitig wieder um  $d$  Stellen zurückrücken, ohne dass sich nach 89 der Wert des Flaches ändert. Ferner ist der letzte Ausdruck nach 88, wenn man  $a_r$  und  $a_{r'}$  vertauscht,

$$\begin{aligned} D &= -(-1)^p \overset{n}{[a_r a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z a_{r'} a_{s'} \cdots a_{u'}]} \\ &= (-1)^p \overset{n}{[a_{r'} a_s \cdots a_u a_v \cdots a_z a_r a_{s'} \cdots a_{u'}]} \\ &= \overset{n}{[a_1 a_2 \cdots a_n]} \quad (\text{nach a}). \end{aligned}$$

Also ist jener Ausdruck (c) allen Bedingungen unterworfen, denen die Glieder der Summe (b) unterworfen sind, ist also, da jene Summe alle Glieder enthält, die jenen Bedingungen genügen, selbst ein Glied jener Summe. Dies Glied hebt sich nun mit dem zuerst betrachteten Gliede auf; denn

$$\begin{aligned} &(-1)^p \overset{n}{[a_r \bar{a}_{r'} (a_s \bar{a}_{s'}) \cdots (a_u \bar{a}_{u'}) (a_v a_w \cdots a_z)]} \\ &+ (-1)^{p+1} \overset{n}{[a_{r'} \bar{a}_r (a_s \bar{a}_{s'}) \cdots (a_u \bar{a}_{u'}) (a_v a_w \cdots a_z)]} = 0, \end{aligned}$$

da  $(-1)^{p+1} = -(-1)^p$  ist und  $\overset{n}{[a_r \bar{a}_{r'}]} = \overset{n}{[a_{r'} \bar{a}_r]}$  ist nach 197. Auf gleiche Weise findet sich zu jedem Gliede jener Summe ein ihm zugepartes, welches sich mit ihm aufhebt; also ist jene Summe null, also auch das dieser Summe gleiche

$$\overset{n}{[A\bar{B}]} + \overset{n}{[A_1 \bar{B}_1]} + \cdots = 0.$$

2. Wenn  $m < n - m$  ist, so ist nach 192, wenn noch  $m(n - m - 1) = c$  gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \overset{n}{[A\bar{B}]} + \overset{n}{[A_1 \bar{B}_1]} + \cdots &= (-1)^c \overset{n}{[B\bar{A}]} + (-1)^c \overset{n}{[B_1 \bar{A}_1]} + \cdots \\ &= (-1)^c (\overset{n}{[B\bar{A}]} + \overset{n}{[B_1 \bar{A}_1]} + \cdots) \quad (148). \end{aligned}$$

Hier ist nach Beweis 1 die in Klammer geschlossene Summe 0, also

$$\overset{n}{[A\bar{B}]} + \overset{n}{[A_1 \bar{B}_1]} + \cdots = (-1)^c (0) = 0 \quad (127),$$



$$\text{Satz. } [{}^n ab \overline{cd}] + [{}^n ac \overline{db}] + [{}^n ad \overline{bc}] = 0. \quad 242.$$

$$\text{Satz. } [{}^n abc] + [{}^n bca] + [{}^n cab] = 0. \quad 243.$$

$$\text{Satz. } [{}^n abcd] - [{}^n bcda] + [{}^n cda b] - [{}^n dab c] = 0. \quad 244.$$

Der Satz 242 folgt unmittelbar aus 241. Die Sätze 243 bis 244 folgen ebenso, wenn man im ergänzenden Geschiedsfläche statt der Größen  $a, b, c, d$  das Flach derselben mit 1 setzt.

**Satz.** Wenn man aus einer Reihe von  $4m$  Größen erster Stufe 245.  $a_1 \dots a_{4m}$  die sämtlichen Geschiedsfläche (multiplikativen Komplexionen)  $A, B, C, \dots$  zur  $2m$ ten Klasse, welche eine dieser Größen, z. B.  $a_1$  enthalten, bildet, und jede derselben mit den ergänzenden Geschiedsflächen  $A', B', C', \dots$  zu einem Innenzeuge knüpft, so ist die Summe dieser Zeuge null, d. h.

$$[{}^n A \overline{A'}] + [{}^n B \overline{B'}] + \dots = 0.$$

**Beweis.** Da  $A, B, \dots$  die sämtlichen  $a_1$  enthaltenden Geschiedsfläche aus  $4m$  Elementen zur  $2m$ ten Klasse sind, so sind ihre ergänzenden Geschiedsfläche  $A', B', \dots$  die sämtlichen Geschiedsfläche aus denselben Größen erster Klasse zu derselben Klasse, welche  $a_1$  nicht enthalten. Ferner, da die Klassen von  $A, B, \dots A', B', \dots$  gerade sind, so ist nach 89 auch  $[{}^n AA'] = [{}^n A'A]$ , und also nach 229, wenn  $A'$  das ergänzende Geschiedsflach von  $A$  ist, auch  $A$  das ergänzende Geschiedsflach von  $A'$ , und ebenso  $B$  das von  $B'$ , mithin nach 241

$$[{}^n A \overline{A'}] + [{}^n B \overline{B'}] + \dots + [{}^n A' \overline{A}] + [{}^n B' \overline{B}] + \dots = 0.$$

Aber nach 197 ist  $[{}^n A \overline{A'}] = [{}^n A' \overline{A}]$ ,  $[{}^n B \overline{B'}] = [{}^n B' \overline{B}]$  ..

Also

$$2[{}^n A \overline{A'}] + 2[{}^n B \overline{B'}] + \dots = 0, \text{ d. h.}$$

$$[{}^n A \overline{A'}] + [{}^n B \overline{B'}] + \dots = 0.$$

## 16. Die Winkelfolgen der Innenzeuge.

**Erklärung.** Der Winkel  $AB$  (Zeichen  $\angle AB$ ) heist der 246. Winkel zwischen 0 und  $\pi$ , diese miteingeschlossen, dessen Cosinus gleich dem durch die Zahlwerte  $\alpha$  und  $\beta$  der Größen  $A$  und  $B$  geteilten Innenzeuge oder innern Produkte jener Größen  $A$  und  $B$  ist, sofern  $A$  und  $B$  gleicher Klasse und ungleich Null sind, d. h. es ist

$$\cos \angle AB = \frac{[{}^n A \overline{B}]}{\alpha \beta} \quad \angle AB = M[0, \pi],$$



Der Sinus  ${}^n[abc \dots]$ , wo  $a, b, c, \dots$  Größen erster Stufe,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  ihre Zahlwerte und der Sinus nicht eine Strichgröße (nicht negativ) ist, ist der Ausdruck, welcher dem Zahlwerte nach gleich  $\frac{{}^n[abc \dots]}{\alpha\beta\gamma}$  ist, d. h. es ist

$$(\sin {}^n[abc \dots])^2 = \frac{{}^n[abc \dots]^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} \quad \sin {}^n[abc \dots] \geq 0.$$

247. Satz. Wenn  $a, b$  Größen erster Klasse sind, so ist

$$\sin {}^n[ab] = \sin \angle ab.$$

Beweis. Nach 246 ist

$$(\sin {}^n[ab])^2 = \frac{{}^n[ab]^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{a^2b^2 - {}^n[\overline{ab}]^2}{\alpha^2\beta^2} \quad (235)$$

$$= \frac{\alpha^2\beta^2 - {}^n[\overline{ab}]^2}{\alpha^2\beta^2} \quad (200)$$

$$= 1 - \left[ \frac{{}^n[\overline{ab}]}{\alpha\beta} \right]^2$$

$$= 1 - (\cos \angle ab)^2 \quad (246)$$

$$= (\sin \angle ab)^2.$$

Und da nach der Erklärung 246  $\sin {}^n[ab]$  nie eine Strichgröße (nie negativ) und  $\angle ab$  ein Winkel zwischen 0 und  $\pi$ , also  $\sin \angle ab$  auch nicht eine Strichgröße ist, so folgt aus  $(\sin {}^n[ab])^2 = (\sin \angle ab)^2$ , auch  $\sin {}^n[ab] = \sin \angle ab$ .

248. Satz.  ${}^n[A\overline{B}] = \alpha\beta \cos \angle AB$ , wenn  $A$  und  $B$  von gleicher Klasse und  $\alpha$  und  $\beta$  ihre Zahlwerte sind.

Beweis. Unmittelbar aus 246.

249. Satz.  ${}^n[ab]^2 = (\alpha\beta \sin \angle ab)^2$ , wo  $\alpha$  und  $\beta$  die Zahlwerte von  $a$  und  $b$  sind.

$$\begin{aligned} \text{Beweis. Nach 235 ist } {}^n[ab]^2 &= \alpha^2\beta^2 - {}^n[\overline{ab}]^2 \\ &= \alpha^2\beta^2 - (\alpha\beta \cos \angle ab)^2 \quad (248) \\ &= \alpha^2\beta^2(1 - (\cos \angle ab)^2) \\ &= \alpha^2\beta^2(\sin \angle ab)^2. \end{aligned}$$

In diesen Formeln tritt der Gegensatz zwischen dem äußern und innern Zeuge in einfachster Gestalt hervor. Während das innere Zeug oder Produkt zweier Größen erster Klasse  ${}^n[\overline{ab}]$  gleich dem Zeuge der Zahlwerte in den cosinus des Zwischenwinkels ist, so ist das äußere Zeug oder Produkt derselben Größen,



abgesehen vom  $\mp$  Zeichen, gleich dem Zeuge der Zahlwerte in den sinus des Zwischenwinkels.

**Satz.**  $[\bar{ab}(cd)] = \alpha\beta\gamma\delta(\sin \angle ab)(\sin \angle cd) \cos \angle ab(cd)$ , 250.  
wenn  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  die Zahlwerte von  $a, b, c, d$  find.

**Beweis.** Der Zahlwert von  $[ab]$  ist  $([ab]^2)^{1/2}$  und der von  $[cd]$  ist  $([cd]^2)^{1/2}$ , also ist nach 248

$$\begin{aligned} [\bar{ab}(cd)] &= ([ab]^2 [cd]^2)^{1/2} (\cos \angle ab(cd)) \\ &= [(\alpha\beta \sin \angle ab)^2 (\gamma\delta \sin \angle cd)^2]^{1/2} \cos \angle ab(cd) \quad (249). \end{aligned}$$

Aber da das Zeug  $\alpha\beta(\sin \angle ab)\gamma\delta(\sin \angle cd)$  ein Pluswert oder positiv ist, so hebt sich das fortschreitende Erhöhen dieser Größen durch 2 und  $1/2$  auf, und es wird

$$[\bar{ab}(cd)] = \alpha\beta\gamma\delta(\sin \angle ab)(\sin \angle cd) \cos \angle ab(cd).$$

**Satz.** Die normige Zurückleitung von  $A$  auf eine Gröse gleicher 251. Klasse  $B$  ist im Zahlwerte gleich  $A \cos \angle AB$ .

**Beweis.** Wenn  $A'$  die normige Zurückleitung von  $A$  auf  $B$  ist, so ist nach 215

$$\begin{aligned} A' &= \frac{[\bar{AB}]B}{\beta^2} = \frac{\alpha\beta(\cos \angle AB) \cdot B}{\beta^2} \quad (248) \\ &= \alpha(\cos \angle AB) \cdot \frac{B}{\beta}, \text{ also im Zahlwerte } = A \cos \angle AB. \end{aligned}$$

**Satz.** Wenn  $a, b, c, \dots$  zu einander normig find, so ist für 252. jede aus ihnen hörig, d. h. als Vielfachenfumme derselben darstellbare Gröse  $k$

$$\frac{k}{x} = \frac{a}{\alpha} \cos \angle ak + \frac{b}{\beta} \cos \angle bk + \dots,$$

wo  $x, \alpha, \beta, \dots$  die Zahlwerte von  $k, a, b, \dots$  find.

**Beweis.** Es sei  $k = xa + yb + \dots$ , so erhalten wir durch innere Webung oder Multiplikation mit  $a$ , weil  $[\bar{ba}]$  u. f. w. null find,

$$[\bar{ak}] = x[\bar{aa}] = x\alpha^2 \quad (200),$$

$$\begin{aligned} \text{mithin } x &= \frac{[\bar{ak}]}{\alpha^2} = \frac{\alpha x \cos \angle ak}{\alpha^2} \quad (248) \\ &= \frac{x}{\alpha} \cos \angle ak. \end{aligned}$$

Aus gleichem Grunde ist  $y = \frac{x}{\beta} \cos \angle bk$  u. f. w. Diese Werte von  $x, y, \dots$  in die obige Formel eingesetzt, giebt



$$k = \frac{x}{\alpha} (\cos \angle ak) \cdot a + \frac{x}{\beta} (\cos \angle bk) \cdot b + \dots, \text{ d. h.}$$

$$\frac{k}{x} = \frac{a}{\alpha} \cos \angle ak + \frac{b}{\beta} \cos \angle bk + \dots$$

253. **Satz.** Wenn  $a, b, c, \dots$  zu einander normig und  $k$  und  $l$  zu ihnen hörig, d. h. als Vielfachensummen derselben darstellbar sind, so ist
- $$\cos \angle kl = (\cos \angle ak) \cos \angle al + (\cos \angle bk) \cos \angle bl + \dots$$

Beweis. Nach 246 ist, wenn  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, x, \lambda$  die Zahlwerte von  $a, b, c, \dots, k, l$  sind,

$$\begin{aligned} \cos \angle kl &= \frac{[k \bar{l}]}{x \lambda} = \left[ \frac{k}{x} \left( \frac{\bar{l}}{\lambda} \right) \right] = \left[ \left( \frac{a}{\alpha} \cos \angle ak + \frac{b}{\beta} \cos \angle bk + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{a}{\alpha} \cos \angle al + \frac{b}{\beta} \cos \angle bl + \dots \right) \right] \quad (252) \\ &= \frac{a^2}{\alpha^2} (\cos \angle ak) \cos \angle al + \frac{b^2}{\beta^2} (\cos \angle bk) \cos \angle bl + \dots, \end{aligned}$$

weil  $[a \bar{b}]$  u. f. w. null sind. Da nun  $a^2 = \alpha^2$ ,  $b^2 = \beta^2$ , u. f. w., so erhält man

$$\cos \angle kl = (\cos \angle ak) \cos \angle al + (\cos \angle bk) \cos \angle bl + \dots$$

254. **Satz.** Statt eine Gröse erster Klasse  $k$  auf eine andere  $l$  zurückzuleiten, kann man jene zuerst auf die Grösen eines Normvereins zurückleiten und dann die so erhaltenen Zurückleitungen auf  $l$  zurückleiten, und diese letzten Zurückleitungen zufügen oder addieren, vorausgesetzt, dass hierbei alle Zurückleitungen normig sind.

Beweis. Es ist dieser Satz nur ein anderer Ausdruck für das in Satz 253 Bewiesene.

255. **Satz.** Wenn  $a, b, \dots$  zu einander normig und  $k$  und  $l$  zu ihnen hörig, d. h. als Vielfachensummen derselben darstellbar und gleichfalls zu einander normig sind, so ist

$$0 = (\cos \angle ak) \cos \angle al + (\cos \angle bk) \cos \angle bl + \dots$$

Beweis. Die Formel geht unmittelbar aus 253 hervor, wenn man  $\angle kl = 90^\circ$  setzt.

256. **Satz.** Wenn  $a, b, \dots$  zu einander normig sind, so ist für jedes zu ihnen hörige, oder als Vielfachensumme derselben darstellbare  $k$

$$1 = (\cos \angle ka)^2 + (\cos \angle kb)^2 + \dots$$

Beweis. Die Formel geht unmittelbar aus 253 hervor, wenn man  $l = k$  setzt.

257. **Satz.** Wenn  $a + b + \dots = 0$  ist, und  $\alpha, \beta, \dots$  die Zahlwerte von  $a, b, \dots$  sind, so ist



$$a) \quad \alpha : \beta : \dots = \sin a' : \sin b' : \dots,$$

wo  $a', b', \dots$  die zu  $a, b, \dots$  ergänzenden Geschiedsfläche aus  $a, b, \dots$  find,

$$b) \quad \alpha \cos \angle ax + \beta \cos \angle bx + \dots = 0,$$

wo  $x$  eine beliebige Gröse ist,

$$c) \quad (\sin a') \cos \angle ax + (\sin b') \cos \angle bx + \dots = 0.$$

Beweis. 1. Modelt man die Gleichung

$$a + b + \dots = 0$$

mit  ${}^n[cd \dots]$ , so erhält man, da alle andern Glieder zwei gleiche Fläche enthalten und also null werden,

$${}^n[acd \dots] + {}^n[bcd \dots] = 0, \text{ also } {}^n[acd \dots]^2 = {}^n[bcd \dots]^2,$$

wo  ${}^n[acd \dots]$  das Enflach aller Grösen  $a, b, c, \dots$ , mit Ausnahme von  $b$  und  ${}^n[bcd \dots]$  das Enflach aller Grösen, mit Ausnahme von  $a$  ist. Somit ist nach 246

$$(\alpha \gamma \delta \dots)^2 (\sin {}^n[acd \dots])^2 + (\beta \gamma \delta \dots)^2 (\sin {}^n[bcd \dots])^2 = 0,$$

$$\text{oder } \alpha^2 (\sin {}^n[acd \dots])^2 = \beta^2 (\sin {}^n[bcd \dots])^2.$$

Nun ist  ${}^n[acd \dots]$  das ergänzende Geschiedsflach zu  $b$ , also  $= b'$ , und

${}^n[bcd \dots]$  das ergänzende zu  $a$ , also  $= a'$ , also  $\sin b' = \sin {}^n[acd \dots]$  und

$\sin a' = \sin {}^n[bcd \dots]$ , also, da  $\alpha, \beta, \sin a', \sin b'$  Pluswerte find,

$$\alpha \sin b' = \beta \sin a', \text{ d. h. } \alpha : \beta = \sin a' : \sin b',$$

und somit allgemein

$$\alpha : \beta : \dots = \sin a' : \sin b' : \dots.$$

2. Webt oder multipliziert man die Gleichung  $a + b + \dots = 0$  innerlich mit einer beliebigen, von null verschiedenen Gröse erster Stufe  $x$ , so erhält man

$${}^n[a\bar{x}] + {}^n[b\bar{x}] + \dots = 0,$$

also wenn  $\xi$  der Zahlwert von  $x$  ist, so ist

$$\alpha \xi \cos \angle ax + \beta \xi \cos \angle bx + \dots = 0, \text{ d. h.}$$

$$\alpha \cos \angle ax + \beta \cos \angle bx + \dots = 0.$$

3. Setzt man in die so erhaltene Gleichung die vorher gewonnenen Werte von  $\alpha : \beta : \gamma : \dots$  ein, so erhält man

$$(\sin a') \cos \angle ax + (\sin b') \cos \angle bx + \dots = 0.$$

Die erste Formel des Satzes enthält für drei Grösen den bekannten Satz dass im Dreiecke die Seitenlängen sich wie die sinus der Gegenwinkel verhalten. Alle drei Formeln haben übrigens nur dann eine Bedeutung, wenn zwischen den Grösen  $a, b, \dots$  keine andere Beziehung herrscht, als die durch die Gleichung  $a + b + \dots = 0$  dargestellt ist, d. h. wenn die  $n$  Grösen  $a, b, \dots$  in keinem Gebiete, von niederer als  $(n - 1)$ ter Stufe vereinigt find.



258. **Satz.**  $(a + b)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta \cos \angle ab + \beta^2$ , wo  $\alpha, \beta$  die Zahlwerte von  $a, b$  find.

Beweis. Unmittelbar aus 223, wenn man die Werte nach 248 nimmt.

259. **Satz.**  $(a + b + c)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos \angle bc + 2\gamma\alpha \cos \angle ca + 2\alpha\beta \cos \angle ab$ , wo  $\alpha, \beta, \gamma$  die Zahlwerte von  $a, b, c$  find.

Beweis. Unmittelbar aus 224.

260. **Satz.**  $(\sin \angle \overline{AB})(\sin \angle AB) \cos \angle \overline{AB}(AB) = S(\cos \angle A_r A) \cos \angle B_r B$ , wo  $A_r$  die Geschiedsfläche aus den Größen erster Klasse von  $[\overline{AB}]$ , zur so vielen Klasse, als die Klasse von  $A$  beträgt, und  $B_r$  die ergänzenden Geschiedsfläche find.

Beweis. Nach 228 ist

$$[\overline{AB}(\overline{AB})] = S[A_a \overline{A}][B_a \overline{B}]$$

Die Zahlwerte von  $A, B, A$  und  $B$  seien  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , die Zahlwerte von  $[\overline{AB}]$  und von  $[A_a B_a]$  find nach 228 einander gleich. Nach 250 ist dann die erste Seite

$$[\overline{AB}(\overline{AB})] = \alpha\beta\gamma\delta(\sin \angle \overline{AB})(\sin \angle AB) \cos \angle \overline{AB}(AB)$$

und nach 248 ist die zweite Seite

$$S[A_a \overline{A}(B_a \overline{B})] = \alpha\beta\gamma\delta S(\cos \angle A_a A) \cos \angle B_a B,$$

mithin ist

$$(\sin \angle \overline{AB})(\sin \angle AB) \cdot \cos \angle \overline{AB}(AB) = S(\cos \angle A_a A) \cos \angle B_a B$$

261. **Satz.**  $(\sin^n[abc \dots])(\sin^n[a'b'c' \dots]) \cos \angle (abc \dots a'b'c' \dots)$   
 $= \Delta \begin{cases} \cos \angle aa', \cos \angle ab', \dots \\ \cos \angle ba', \cos \angle bb', \dots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{cases}$

Beweis. Nach 233 ist

$$[abc \dots (\overline{a'b'c' \dots})] = \Delta \begin{cases} a \overline{a'}, a \overline{b'}, a \overline{c'}, \dots \\ b \overline{a'}, b \overline{b'}, b \overline{c'}, \dots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{cases}$$

mithin wenn man nach 250 und nach 248 die Werte einführt und beide Seiten durch die gleichen Zahlwerte teilt, so folgt unmittelbar der Satz.

262. **Satz.**

$$(\sin^n[ab])(\sin^n[cd]) \cos \angle ab(cd) = (\cos \angle ac) \cos \angle bd - (\cos \angle ad) \cos \angle bc.$$

Beweis. Unmittelbar aus 234, wenn man die Werte nach 250 und 248 einführt.



Satz.

263.

$$(\sin^n[ab])(\sin^n[ac])\cos \angle ab(ac) = \cos \angle bc - (\cos \angle ac) \cdot \cos \angle ab.$$

Beweis. Unmittelbar aus 261, wenn man a und c statt c und d

setzt, da  $\cos \angle aa = \frac{[a\bar{a}]}{\alpha^2} = 1$  ist.

Der Satz enthält eine bekannte Formel der sphärischen Trigonometrie.

$$\text{Satz. } (\sin \angle ab)^2 = 1 - (\cos \angle ab)^2. \quad 264.$$

$$\text{Satz. } (\sin \angle abc)^2 = 1 - (\cos \angle bc)^2 - (\cos \angle ac)^2 - (\cos \angle ab)^2 \quad 265.$$

$$+ 2(\cos \angle ab)(\cos \angle bc)\cos \angle ca.$$

Beweis. Unmittelbar aus 236, wenn man die Werte nach 249 und 248 einführt, da  $\frac{a^2b^2c^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = 1$  ist, wo  $\alpha, \beta, \gamma$  die Zahlwerte von a, b, und c.

$$\text{Satz. } (\sin^n[ab])(\sin^n[cd])\cos \angle ab(cd) + (\sin^n[ac])(\sin^n[bd])\cos \angle ac(bd) \quad 266.$$

$$+ (\sin^n[ad])(\sin^n[bc])\cos \angle ad(bc) = 0.$$

Beweis. Unmittelbar aus 242.

Satz.  $(\sin A)(\sin A')\cos \angle AA' + (\sin B)(\sin B')\cos \angle BB' + \dots = 0, \quad 267.$   
wenn A, B, C, ... die Geschiedsfläche aus 4n Größen erster Stufe zur 2n ten Klasse und A', B', C', ... deren ergänzende Geschiedsfläche sind.

Beweis. Unmittelbar aus 245.



## Anhang:

### Anwendung der Ausdehnungslehre zur Lösung der Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

268. Satz. Wenn  $m$  Gleichungen ersten Grades mit  $m$  Unbekannten gegeben sind von der Form

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \cdots + \mu_1 x_m = v_1$$

$$\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \cdots + \mu_2 x_m = v_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\alpha_m x_1 + \beta_m x_2 + \gamma_m x_3 + \cdots + \mu_m x_m = v_m, \text{ so ist}$$

$$x_1 = \frac{\Delta^m(v_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)}, \quad x_2 = \frac{\Delta^m(\alpha_a v_b \gamma_c \cdots \mu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \mu_m)} \dots \dots$$

$$x_m = \frac{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \lambda_l v_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \cdots \lambda_l \mu_m)}, \text{ wo } a, b, c, \dots, m \text{ sämmtlich einander ungleich sind.}$$

Beweis. Um eine Gleichung zu gewinnen, in welcher alle Unbekannten ausser einer, z. B.  $x_1$ , verschwinden, bildet man neue Gleichungen, in denen stets nur die Vorzahlen einer Unbekannten vorkommen, indem man die Vorzahlen  $\alpha_1, \beta_1, \dots$  mit  $e_1$ , die  $\alpha_2, \beta_2, \dots$

mit  $e_2$  u. f. w. vervielfacht, wo  $[e_1 e_2 \cdots e_m] = 1$  ist, also

$$\begin{cases} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \cdots + \alpha_m e_m = a \\ \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \cdots + \beta_m e_m = b \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \cdots + \mu_m e_m = m \\ v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + \cdots + v_m e_m = n \end{cases}$$



und bildet daraus die Gleichung

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + \dots + mx_m = n,$$

so ersetzt dieselbe nach 16 die gegebenen  $m$  Gleichungen; denn es ist dann  $(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \dots + \mu_1 x_m) e_1 = \nu_1 e_1$  u. f. w. Um nun ein  $x_a$ , z. B.  $x_1$  zu finden, vervielfacht man die Gleichung  $+$  mit  $bc \dots m$ , dann werden alle Glieder  $bbc \dots m$ ,  $bcc \dots m$ ,  $\dots bc \dots mm$  nach 92 null und es bleibt nur

$$x_1 \begin{bmatrix} abc \dots m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nbc \dots m \end{bmatrix}.$$

Und ebenso  $x_2 \begin{bmatrix} abc \dots m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} anc \dots m \end{bmatrix}$  u. f. w.

$$x_m \begin{bmatrix} abc \dots m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} abc \dots ln \end{bmatrix}.$$

Hier kann nun  $\begin{bmatrix} abc \dots m \end{bmatrix}$  gleich Null oder ungleich Null sein.

Im letztern Falle kann man die Gleichung durch  $\begin{bmatrix} abc \dots m \end{bmatrix}$  teilen oder dividiren und erhält dann

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} nbc \dots m \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} abc \dots m \end{bmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{bmatrix} anc \dots m \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} abc \dots m \end{bmatrix}}, \quad \dots \quad x_m = \frac{\begin{bmatrix} abc \dots ln \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} abc \dots lm \end{bmatrix}},$$

oder wenn man für diese Größen  $a, b, \dots m$ ,  $n$  die Werte nach \* einführt, so erhält man nach 94

$$x_1 = \frac{S(\nu_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m) \begin{bmatrix} e_a e_b e_c \dots e_m \end{bmatrix}}{S(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m) \begin{bmatrix} e_a e_b e_c \dots e_m \end{bmatrix}},$$

wo  $a, b, c, \dots m$  sämmtlich einander ungleich sein müssen (da sonst  $\begin{bmatrix} e_a e_b e_c \dots e_m \end{bmatrix} = 0$  wird) und dieser Ausdruck nach 96

$$x_1 = \frac{\Delta^m(\nu_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m) \begin{bmatrix} e_1 e_2 \dots e_m \end{bmatrix}}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m) \begin{bmatrix} e_1 e_2 \dots e_m \end{bmatrix}} = \frac{\Delta^m(\nu_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m)},$$

da  $\begin{bmatrix} e_1 e_2 \dots e_m \end{bmatrix} = 1$  gesetzt ist. Und entsprechend

$$x_2 = \frac{\Delta^m(\alpha_a \nu_b \gamma_c \dots \mu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \mu_m)} \dots x_m = \frac{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \lambda_l \nu_m)}{\Delta^m(\alpha_a \beta_b \gamma_c \dots \lambda_l \mu_m)}.$$

Wenn das Flach  $\begin{bmatrix} abc \dots m \end{bmatrix}$ , bez.  $\begin{bmatrix} a_1 a_2 \dots a_m \end{bmatrix}$  gleich Null ist, so herrscht nach 14 zwischen den Größen  $a, b, \dots m$  eine Hörigkeit, dann lässt sich nach 19 aus ihnen eine freie Größenreihe ausfindern, zu der die andern Größen hörig sind. Es seien  $a_1, \dots a_r$  die gegenseitig freien,  $a_{r+1} \dots a_m$  die zu ihnen hörigen Größen, dann ist nach \* auch  $n$  zu ihnen hörig. Dann ist also  $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_r a_r = c$ , wo  $c = b - (x_{r+1} a_{r+1} + \dots + x_m a_m)$  und man erhält dann











Dann erhält man

$$u_1 + u_2x + u_3x^2 + \cdots + u_{m+n}x^{m+n-1} = 0.$$

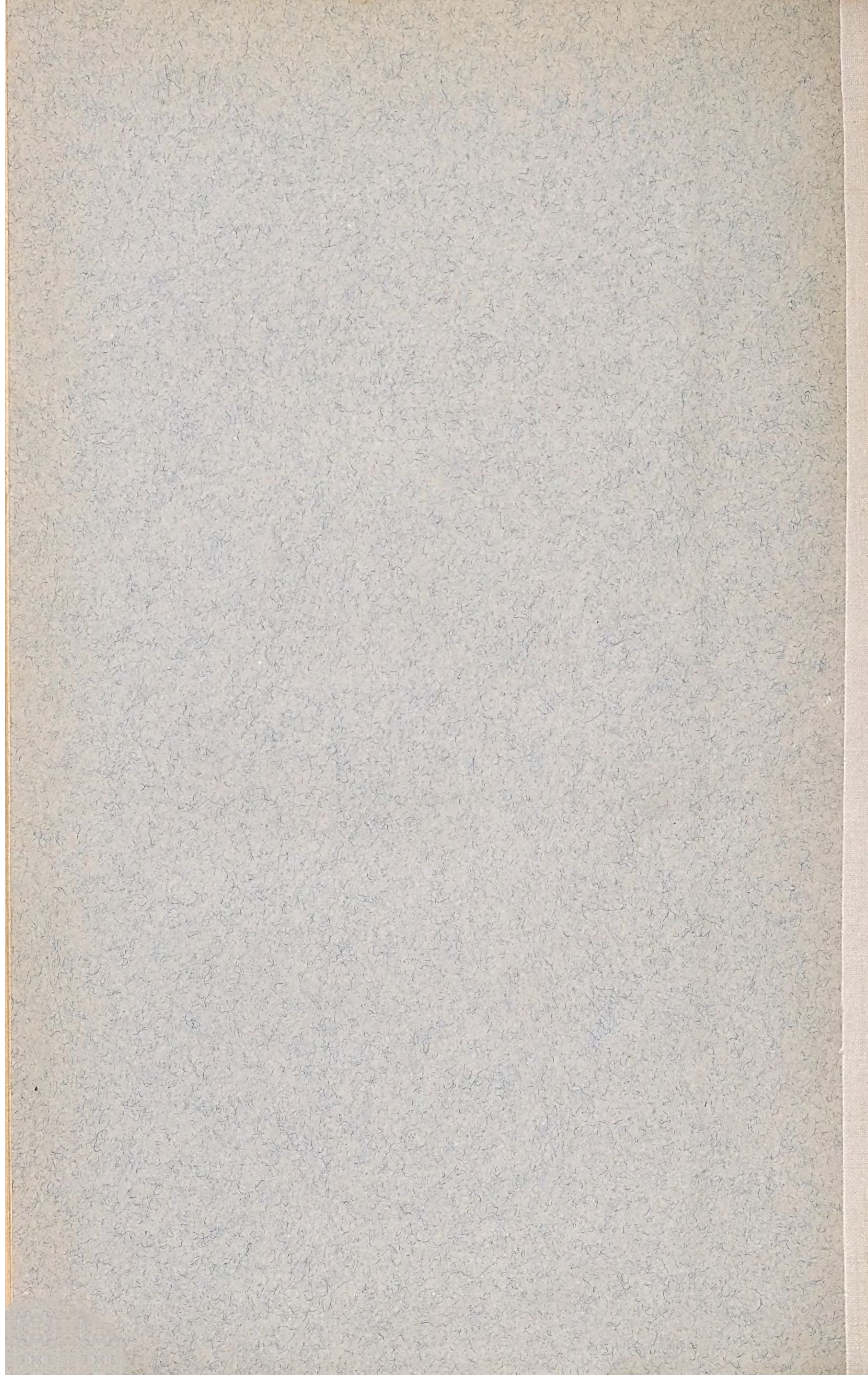
Flacht man diese Gleichung mit den Fachen  $u_2, u_3, \dots, u_{m+n}$ , so erhält man  $[u_1u_2u_3 \cdots u_{m+n}] = 0$ , da alle Fläche, welche zwei gleiche Fache oder Faktoren enthalten, Null werden, und hier sind alle Höhen von  $x$  entfernt, und hat man demnach die Gleichung, aus welcher  $x$  entfernt ist.

—•••••—













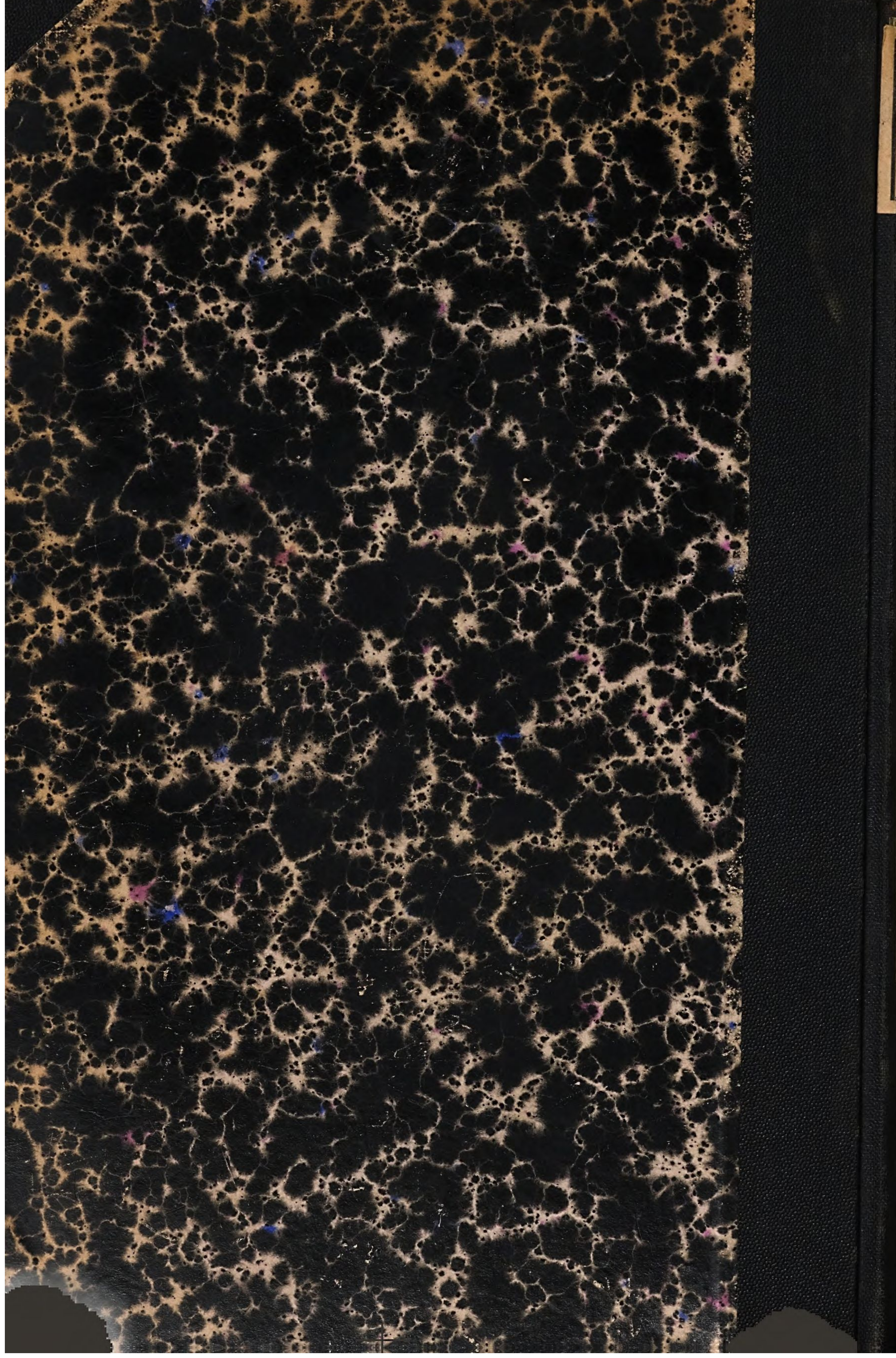






**Karl Bögl.**







Grassmann, Robert

Die Ausdehnungslehre oder die Wissenschaft von den extensiven Größen[!]  
der niedere Zweig d. Synthese ...

Stettin ([1891])

Math.p. 185 v

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650936-8